Competencia matemática
Competencias clave

Nivel 2

Financiado por
la Unión Europea
NextGenerationEU

MINISTERIO
DE TRABAJO
Y ECONOMÍA SOCIAL

Plan de Recuperación,
Transformación
y Resiliencia

Castilla-La Mancha

Índice de contenidos

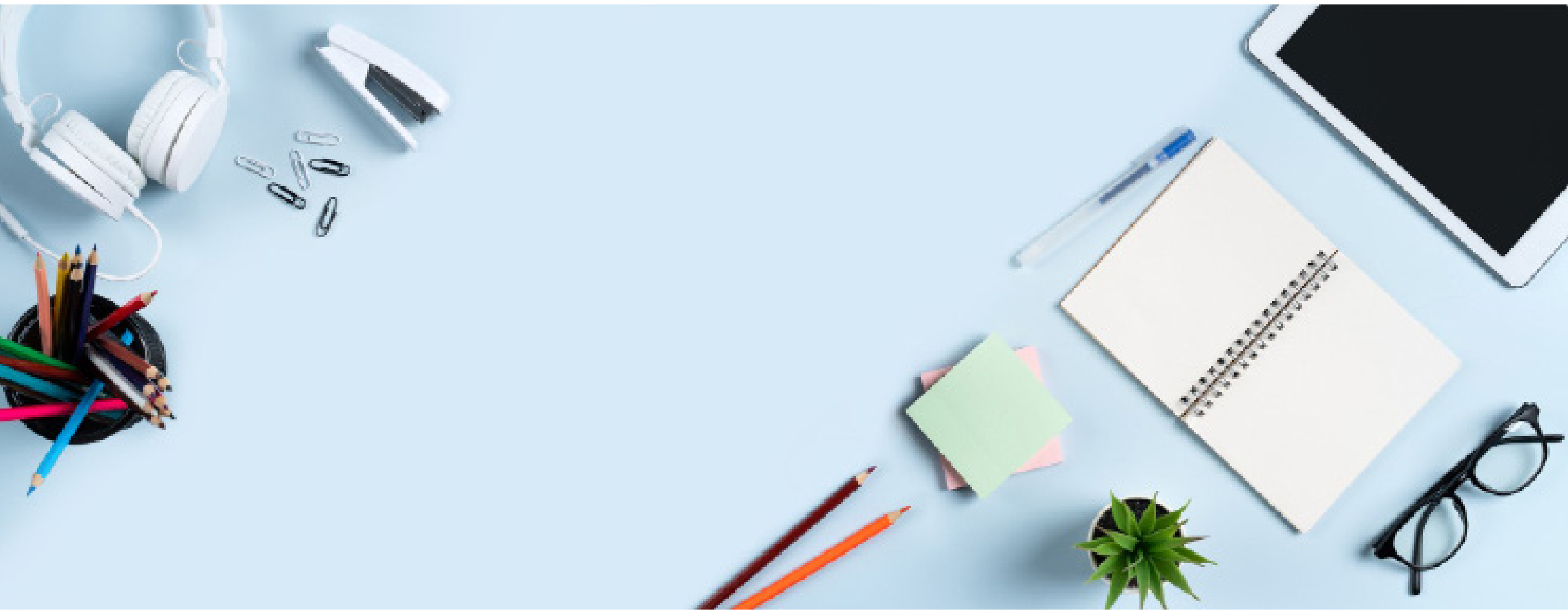
Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

BLOQUE I: UTILIZACIÓN DE LOS NÚMEROS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

UD1.1: NÚMEROS NATURALES.

Presentación



Los números naturales, múltiplos, divisores, mínimo común múltiplo y máximo común divisor constituyen fundamentos esenciales en las matemáticas. En esta unidad didáctica exploraremos las propiedades y aplicaciones de estos conceptos en diversos problemas y situaciones.

Analizaremos los números naturales, los múltiplos y los divisores, así como las reglas y propiedades que los caracterizan. Conoceremos las técnicas para identificar y calcular los múltiplos y divisores de un número y aprenderemos cómo utilizarlos en la resolución de problemas matemáticos.

Al trabajar esta unidad dominarás las habilidades necesarias para trabajar con números naturales, múltiplos y divisores de forma correcta. Conocerás las estrategias para encontrar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más números, y comprenderás cómo utilizar estas herramientas en la simplificación de fracciones, la resolución de problemas de división y la optimización de operaciones numéricas.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Objetivos

- Conocer y manejar elementos matemáticos básicos, como son los números naturales, múltiplos, divisores, mínimo común múltiplo y máximo común divisor.
- Realizar cálculos en los que intervengan distintos tipos de números naturales, aplicando las cuatro operaciones básicas.
- Identificar y calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más números.
- Resolver problemas asociados a situaciones de la vida cotidiana mediante la aplicación práctica de la divisibilidad y uso del mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

1. SISTEMA POSICIONAL DE NUMERACIÓN DECIMAL.

1.1. UNIDADES, DECENAS Y CENTENAS.

El **sistema de numeración decimal** es el sistema numérico que utilizamos en nuestro día a día. Es muy importante ya que nos ayuda a contar, medir y entender diferentes elementos de nuestra vida cotidiana.

En este sistema, utilizamos **diez símbolos** diferentes con los que se **representan los números:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Cada uno de estos números tiene un valor y, al combinarlos, conseguimos nuevas formas de contar. De hecho, el sistema decimal permite un número infinito de combinaciones, por lo que nos permite utilizarlo para cualquier cantidad.

Los **elementos fundamentales del sistema posicional** son las unidades, decenas y centenas. Son términos que utilizamos para organizar y contar los números en el sistema decimal.

- La **unidad** es el número más pequeño que existe. Representa un solo objeto o elemento. Por ejemplo, una única manzana representaría una unidad. La unidad se representa con el número 1. Si tienes dos manzanas, tendrías dos unidades. Si tienes tres manzanas, tendrías tres unidades. Y así sucesivamente. Por ejemplo, si tuviéramos cinco manzanas, tendríamos cinco unidades y lo representaríamos con el número 5.

- En segundo lugar, tenemos las **decenas**. Una decena es igual a diez unidades. Una decena de manzanas es equivalente un grupo de diez manzanas. Para representar una decena, utilizamos el número 10. Por tanto, 10 manzanas serían una decena. Si tuviéramos 20 manzanas, sería igual a dos decenas porque hay dos grupos de diez manzanas. Y se representarían con el número 20.

- Por último, tenemos las **centenas.** Una centena es igual a cien unidades o, lo que es lo mismo, diez decenas. Un recipiente en el que hay 100 lápices contiene una centena de lápices. Para representar una centena utilizamos el número 100.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Siguiendo el ejemplo anterior, 100 manzanas serían equivalentes a una centena de manzanas. ¿Y 300 manzanas? Esto sería igual a tres centenas porque tenemos tres grupos de cien manzanas. En ese caso, utilizaríamos el número 300 para representar tres centenas.

Importante

Cada dígito tiene un valor único pero su valor cambia dependiendo de su posición en el número.

Por ejemplo, consideremos el número 524. En este caso, el dígito 4 se encuentra en la posición de las unidades, el dígito 2 en la posición de las decenas y el dígito 5 en la posición de las centenas. Para determinar el valor total de este número, multiplicamos cada dígito por la potencia de diez correspondiente a su posición y, a continuación, sumamos los resultados. Es decir aplicaríamos este cálculo:

$$(5 \times 100) + (2 \times 10) + (4 \times 1) = 500 + 20 + 4 = 524$$

Imagina que tienes una caja con 5 caramelos. Eso sería igual a 5 unidades. Pero si tienes 20 caramelos, sería igual a 2 decenas porque tienes dos grupos de diez caramelos. Si tienes 150 caramelos, sería igual a 1 centena y 5 decenas, porque tienes una caja llena de cien caramelos y otros cinco grupos de diez caramelos.

Este sistema tiene una amplia variedad de aplicaciones. Al realizar la compra, utilizas el sistema decimal para contar el dinero. Por ejemplo, si tienes 3 billetes de 10 euros tendrías 30 euros, es decir, estás sumando tres decenas de euros.

También se puede emplear para cuantificar algo. Por ejemplo, para medir el tiempo se utiliza el sistema decimal. En este caso, una hora completa equivale a 60 minutos o, lo que es lo mismo, 6 decenas de minutos. Y 30 minutos equivaldrían a 30 unidades de minutos.

El sistema decimal también se utiliza en las matemáticas para hacer cálculos. Nos permite sumar, restar, multiplicar y dividir. Por ejemplo, si tienes 2 decenas de manzanas y te regalan 3 unidades de manzanas, tendrías un total de 13 manzanas.

2. NÚMEROS NATURALES.

2.1. REPRESENTACIÓN Y COMPARACIÓN DE NÚMEROS NATURALES.

La representación y comparación de números naturales es una herramienta importante para las matemáticas, ya que nos permite comprender y trabajar con cantidades y magnitudes. Comencemos definiendo qué son los números naturales.

Como hemos visto anteriormente, los **números naturales** son aquellos que son usados para **contar.**

Para la **representación** de los números naturales se utilizan los **símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.** Es decir, para representar los números naturales se aplica el **sistema de numeración decimal utilizando** estos diez números y combinándolos para formar nuevos números.

En función de su posición, poseerán un valor distinto. En general, cuanto más a la izquierda se encuentre un número, mayor valor tendrá, ya que se multiplica por 10 por cada posición que se incremente hacia la izquierda, respecto del primer número en ese mismo lado.

Por ejemplo, en el número 543:

- El 5, al ocupar la tercera posición, equivale a multiplicarlo por 10 dos veces, es decir, equivale al número 500.
- El 4, al ocupar la segunda posición, equivale a multiplicarlo por 10 una vez, es decir, equivale al número 40.
- El 3 se mantendría tal cual.

Para saber si un número natural es mayor que otro se utiliza la **comparación**. Para comparar dos números se comienza observando el valor de las cifras en la posición más a la izquierda. En caso de ser diferentes, el número con la cifra más grande en esa posición es el mayor. Si son iguales, se continúa comparando las cifras en la siguiente posición hacia la derecha. Este proceso se repite hasta que se encuentra una diferencia o se llega al final de los números. En caso de que todas las cifras sean iguales, los números son iguales. De lo contrario, el número con la cifra más alta en la primera posición diferente es el mayor.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Por ejemplo, si estamos comparando los números 568 y 732, podemos ver que el número 7 en la posición más a la izquierda del número 732 es mayor que el 5 en la misma posición del número 568. Por lo tanto, podemos concluir que 732 es mayor que 568.

Importante

La representación y comparación de números naturales nos permite realizar operaciones aritméticas, es decir, sumar, restar, multiplicar y dividir.

La comparación de números está basada en las siguientes **propiedades:**

- **Propiedad de tricotomía.**
- **Propiedad de transitividad.**
- **Propiedad de reflexividad.**
- **Propiedad de antisimetría.**
- **Propiedad de transitividad estricta.**

Propiedades de comparación de números naturales.

Estas propiedades ayudan a garantizar que las comparaciones entre los números naturales se realicen de forma correcta. Permiten establecer un orden claro entre los números y, por tanto, la resolución de los diferentes problemas matemáticos de forma precisa.

2.2. OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS NATURALES.

Las **operaciones básicas** con números naturales son **acciones matemáticas** que nos permiten emplear los números naturales en una amplia variedad de problemas que encontramos en la vida cotidiana y adaptar estos números a diferentes situaciones.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Las operaciones con números reales cumplen una serie de **propiedades** que nos permiten operar con ellos. Las más importantes son las siguientes:

- **Propiedad conmutativa.**
- **Propiedad asociativa.**
- **Propiedad distributiva.**
- **Elemento neutro.**

Propiedades para operar de los números naturales.

A continuación, describiremos en qué consiste cada una de ellas:

1. **Propiedad conmutativa:** El orden de los elementos no afecta al resultado de la operación. En otras palabras, para la suma y la multiplicación, se cumple que $a + b = b + a$. Y $a \times b = b \times a$. Por ejemplo, $3 + 5$ es igual que $5 + 3$. Y 2×4 es igual a 4×2.
2. **Propiedad asociativa:** Esta propiedad establece que la forma en que se agrupan los elementos no afecta el resultado de la operación. En otras palabras, para la suma y la multiplicación, se cumple que $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Por ejemplo, $(2 + 3) + 4$ es igual a $2 + (3 + 4)$ y $(2 \times 3) \times 4$ es igual a $2 \times (3 \times 4)$.
3. **Propiedad distributiva:** Esta propiedad establece la relación entre la suma y la multiplicación. Se cumple que $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. Por ejemplo, $2 \times (3 + 4)$ es igual a $(2 \times 3) + (2 \times 4)$.
4. **Elemento neutro de la suma y la multiplicación:** La suma tiene un elemento neutro que es el número cero (0), ya que $a + 0 = a$ para cualquier número natural a. La multiplicación tiene un elemento neutro que es el número uno (1), ya que $a \times 1 = a$ para cualquier número natural a.

Recuerda

Las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva y de elemento neutro, nos permiten realizar las operaciones con los números naturales, así como simplificar sus expresiones y garantizar que los resultados obtenidos sean válidos.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Las **operaciones básicas** principales son:

Suma.

Resta.

Multiplicación.

División.

Operaciones básicas con números naturales.

Veamos en qué consiste cada una de estas operaciones:

1. **Suma:** La suma es una operación que combina dos o más números para obtener un total. Es un proceso de agregar cantidades. Por ejemplo, si tenemos los números naturales 3 y 5, la suma de estos números es 3 + 5 = 8.

   En la suma, los números se llaman **sumandos** y el resultado se llama **suma o total.**

   La suma se realiza alineando las cifras en las mismas posiciones y sumando las cifras correspondientes de derecha a izquierda.

   La suma también cumple con las siguientes propiedades:

   - **Propiedad conmutativa:** El orden de los sumandos no afecta el resultado.
   - **Propiedad asociativa:** La forma en que se agrupan los sumandos no afecta el resultado.

2. **Resta:** La resta es la operación que facilita la diferencia entre dos números. Nos permite encontrar cuánto falta para llegar de un número a otro. Por ejemplo, si tenemos los números naturales 8 y 3, la resta de estos números es 8 - 3 = 5.

   En la resta, el número del cual se resta se llama **minuendo**, el número que se resta se llama **sustraendo** y el resultado se llama **diferencia**.

   La resta se realiza alineando las cifras en las mismas posiciones y restando las cifras correspondientes de derecha a izquierda. Es importante tener en cuenta que, para realizar una resta, el minuendo debe ser mayor o igual que el sustraendo.

3. **Multiplicación:** La multiplicación es una operación que combina dos o más números para obtener un producto. Es un proceso de repetición de sumas sucesivas. Por ejemplo, si multiplicamos los números naturales 3 y 4, el resultado es 3 × 4 = 12, lo que significa que estamos sumando el número 3 consigo mismo 4 veces.

   En la multiplicación, los números se llaman **factores** y el resultado se llama **producto**.

   La multiplicación se realiza alineando las cifras en las mismas posiciones y multiplicando las cifras correspondientes de derecha a izquierda.

   La multiplicación cumple con las siguientes propiedades:

   - **Propiedad conmutativa:** El orden de los factores no afecta el producto.
   - **Propiedad asociativa:** La forma en que se agrupan los factores no afecta el producto.

4. **División:** La división es una operación que reparte una cantidad en partes iguales. Es la operación inversa de la multiplicación. Por ejemplo, si dividimos el número natural 12 entre 3, el resultado es 12 ÷ 3 = 4, lo que indica que podemos repartir 12 en grupos de 3 y obtenemos 4 grupos.

   En la división, el número que se divide se llama **dividendo**; el número por el cual se divide se llama **divisor**; el resultado se llama **cociente** y, en algunos casos, puede haber un **residuo o resto.** Se pueden dar los siguientes casos:

   - **La división es exacta:** El divisor divide al dividendo sin dejar residuo. En el ejemplo anterior, 12 ÷ 3 = 4, es una división exacta porque el 3 divide a 12 sin dejar residuo.
   - **La división es exacta:** Si la división no es exacta, puede haber un residuo. El residuo es el número que queda después de realizar la división. Por ejemplo, si dividimos 13 entre 5, el resultado es 13 ÷ 5 = 2 con un residuo de 3. Esto significa que podemos repartir 13 en grupos de 5 y obtenemos 2 grupos completos con un residuo de 3. El cociente es el resultado entero de la división, mientras que el residuo es la parte que queda fuera de los grupos completos.

   Además, la división cumple con las siguientes propiedades:

   - **Propiedad de división por uno:** Cualquier número natural dividido por uno es igual a ese mismo número. Por ejemplo, a ÷ 1 = a.
   - **Propiedad de cero dividido por un número:** Cero dividido por cualquier número distinto de cero es igual a cero. Por ejemplo, 0 ÷ a = 0, donde a es cualquier número natural distinto de cero.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

- **Propiedad de división por cero:** La división entre cero no está definida en los números naturales. No es posible dividir un número en partes iguales si el divisor es cero. Por lo tanto, cualquier expresión de la forma a ÷ 0 es considerada indefinida.

3. DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES.

3.1. MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO. USO DE LOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.

Los múltiplos y los divisores son dos conceptos que derivan de la división. Tal y como se ha comentado con anterioridad, la división es una operación utilizada para separar una cantidad en partes iguales. Podría definirse también como el proceso inverso de la multiplicación.

La división se representa matemáticamente utilizando el símbolo de la barra de división (/) o el símbolo de la división (÷). La estructura general de una división es la siguiente:

Dividendo ÷ Divisor = Conciente y resto.

La descripción de cada uno de los elementos de la división es la siguiente:

1. **Dividendo:** Es el número a dividir. Representa la cantidad total a repartir o distribuir.
2. **Divisor:** Es el número por el que se divide el dividendo. Representa la cantidad que divide a la cantidad total.
3. **Conciente:** Es el resultado de la división. Representa la cantidad a partes iguales en las que se divide el dividendo.
4. **Resto:** Es la cantidad que queda después de dividir el dividendo por el divisor, cuando el conciente no es exacto. El resto siempre es menor que el divisor.

Elementos de una división.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Importante

La división puede expresarse también como una fracción con el dividendo en el numerador y el divisor en el denominador.

Múltiplos y divisores de un número

Se define **múltiplo de un número** como el resultado de multiplicar otro número por un número entero. O lo que es lo mismo, si el resultado de la multiplicación de un número por otro entero es otro número, entonces ese segundo número es un múltiplo del primero.

Al número original, es decir, el que se multiplica por el entero se le denomina **número base**. El entero por el que se multiplica, se le denomina **factor**. Por tanto, **el múltiplo es el resultado de multiplicar el número base por el factor.**

Por ejemplo, tenemos el número base 3. Los múltiplos de 3 serían 3, 6, 9, 12, 15, 18, y así sucesivamente. Aquí, el factor sería el número entero por el cual se multiplica 3 para obtener los múltiplos. Si el factor es 2, entonces los múltiplos serían 6, 12, 18, y así sucesivamente.

A partir de la definición, se puede concluir que **todos los números tienen múltiplo**, ya que cualquier número multiplicado por 1 da su mismo número, por lo que el número original es múltiplo de sí mismo.

Por su parte, los **divisores de un número** son todos los números enteros que, al dividir el número original, nos dan un **cociente entero y un residuo igual a cero**. De forma general, los divisores de un número están formados por todos los factores que se pueden multiplicar para obtener ese número. Más concretamente, se puede decir que, si tenemos un número entero positivo n, los divisores de n son aquellos números enteros positivos que cumplen que:

- El divisor divide a n sin dejar residuo, es decir, la división de n entre el divisor es exacta y el residuo es cero.
- El divisor es menor o igual que n y mayor que cero.

Por ejemplo, los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12, ya que al dividir 12, entre cada uno de estos números, se obtiene un cociente entero sin residuo.

Recuerda

Todo número tiene al menos dos divisores: el 1 y el propio número.

3.2. NÚMEROS PRIMOS. NÚMEROS COMPUESTOS. DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS EN FACTORES PRIMOS.

Números primos

Los **números primos** son aquellos **números mayores que uno que poseen únicamente dos divisores:** el número 1 y ellos mismos. Es decir, no se puede dividir de forma exacta o con resto cero, entre ningún otro número.

Algunos ejemplos de números primos son: 2, 3, 7, 19 y 23. Por mucho que se busque, no se encontrará ningún otro número entre el que pueda dividirse de forma exacta.

Importante

El número 1 no se considera un número primo ya que sólo puede dividirse entre sí mismo. Es decir, su único divisor es el 1. Los números primos comienzan a partir del 2.

Los números primos son los elementos básicos para la construcción de otros números. Cada número entero puede ser expresado como una multiplicación de números primos, esta propiedad se denomina **factorización única.** Es decir, cualquier número entero se puede descomponer en una combinación de factores primos únicos.

Además, no existe ningún patrón con el que se puedan calcular los números primos. Su aparición parece aleatoria, por lo que no se puede utilizar ninguna fórmula para calcularlos.

Se pueden definir algunos números primos ya que poseen ciertas peculiaridades. Los más importantes son:

- **Números primos gemelos:** Son pares de números primos que difieren en 2. Por ejemplo, (3, 5), (11, 13), (17, 19) son ejemplos de pares de números primos gemelos. Parece que pueden existir números primos gemelos, aunque todavía hay que demostrarlo.

- **Números primos de Mersenne:** Son números primos de la forma 2^p - 1, donde p es un número primo. Estos números han sido objeto de estudio y búsqueda de nuevos primos de Mersenne. Son especialmente interesantes por sus propiedades y por su relación con la teoría de números.

- **Números primos de Fermat:** Son números de la forma 2^(2^n) + 1, donde n es un número entero no negativo. Los primeros números primos de Fermat son 3, 5, 17, 257, 65537. Han sido objeto de investigación y se han encontrado varios primos de Fermat. Sin embargo, no se ha podido demostrar si hay infinitos primos de Fermat.

Números compuestos

Los **números compuestos** son **números enteros mayores que 1 que poseen más de dos divisores.** En otras palabras, son números que pueden ser divididos de manera exacta por otros números diferentes del 1 y del propio número.

Se diferencian de los números primos, en que los números compuestos pueden ser factorizados en números más pequeños distintos de 1 y del número en sí mismo.

Algunos ejemplos son el 4, el 6, el 8, el 14, el 16, etc. Se pueden factorizar en números menores diferentes del 1 y de sí mismos. Por ejemplo, el número compuesto 12 puede ser factorizado en 2 × 2 × 3. Esta factorización muestra que 12 es divisible de manera exacta por 2 y por 3.

Los números compuestos tienen **múltiples divisores.** Esto significa que se pueden dividir de manera exacta por diferentes números enteros distintos de 1 y del propio número. Por ejemplo, el número 15 es compuesto y se puede dividir exactamente por 3 y por 5.

Además, los números compuestos pueden ser factorizados combinando de factores primos. Esto se conoce como el **Teorema Fundamental de la Aritmética.** Por ejemplo, el número compuesto 84 puede ser factorizado en 2^2 × 3 × 7. Esta factorización única asegura que no importa cómo se realice la factorización, el resultado será el mismo conjunto de factores primos.

Los números compuestos tienen múltiples divisores distintos de 1 y del número mismo. Esto significa que se pueden dividir de manera exacta por más de dos números enteros. Por ejemplo, el número compuesto 30 es divisible por 2, 3, 5 y 10. El hecho de que haya múltiples divisores es una propiedad clave de los números compuestos y es una diferencia sustancial con los números primos, que solo tienen dos divisores.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Dentro de los números compuestos, hay categorías especiales que se han estudiado en profundidad. Son los **números semiprimos**, que son productos de dos números primos distintos, y los números compuestos poderosos, que tienen la propiedad de que cualquier factor primo de ellos también divide a su cociente. Estos tipos de números compuestos tienen características matemáticas interesantes y se emplean en diferentes campos.

Descomposición de números en factores primos

Se conoce como descomposición de un número en sus factores primos al **proceso a través del cual se descompone un número en el producto de otros que son primos y únicos.**

Tal y como hemos comentado, esto es posible gracias al Teorema Fundamental de la Aritmética, por el que todo número entero mayor que 1 se puede expresar de forma única como un producto de factores primos.

Su aplicación se extiende a diferentes ámbitos como, por ejemplo, los siguientes:

- **Matemáticas teóricas.**
- **Criptografía.**
- **Informática.**
- **Matemáticas aplicadas.**

Aplicaciones de la descomposición de números.

3.3. CÁLCULO DE MÚLTIPLOS Y DIVISORES COMUNES A VARIOS NÚMEROS.

Un múltiplo es un número que se obtiene al multiplicar un número por un entero. En otras palabras, si un número "a" es un múltiplo de otro número "b", significa que existe un entero "n" tal que "a" es igual a "b" multiplicado por "n". Es decir, cumpliría la ecuación: $a = b * n$.

Las **características principales de los múltiplos** son:

- **Relación con la multiplicación:** Un múltiplo es el resultado de la multiplicación de un número por otro entero. Por ejemplo, si consideramos el número 5, algunos de sus múltiplos son 10, 15, 20, etc., ya que cada uno de ellos se obtiene multiplicando 5 por un número entero.

- **Infinitud de múltiplos:** Cada número tiene infinitos múltiplos. Por ejemplo, si consideramos el número 3, podemos obtener múltiplos como 6, 9, 12, y así sucesivamente, multiplicando 3 por diferentes enteros positivos o negativos.

- **Múltiplos de 0:** Todos los números enteros son múltiplos de cero (0) porque cualquier número multiplicado por cero es igual a cero. Por ejemplo, 0 es múltiplo de 5 ya que 5 * 0 = 0.

- **Múltiplos de 1:** Todos los números enteros son múltiplos de uno (1) ya que cualquier número multiplicado por uno es igual a sí mismo. Por ejemplo, 10 es múltiplo de 1 ya que 1 * 10 = 10.

- **Relación con los divisores:** Si un número "a" es múltiplo de otro número "b", entonces "b" es divisor de "a". Esto implica que los múltiplos y los divisores están relacionados entre sí.

Por otro lado, los divisores son números enteros que se pueden dividir de manera exacta en otro número sin dejar residuo, es decir, un divisor es un número que divide a otro número sin dejar una fracción o resto.

Algunas de las **características de los divisores** son:

- **Divisibilidad**: Un número "a" es divisible por otro número "b" si la división entre "a" y "b" resulta en un cociente entero. Esto se expresa como a es divisible por b, o también se puede decir que b es divisor de a. Por ejemplo, el número 15 es divisible por 3 ya que 15 dividido por 3 es igual a 5, sin dejar residuo.

- **Divisores propios:** Los divisores propios de un número "a" son aquellos que son menores que "a" y que dividen a "a" sin dejar residuo. Por ejemplo, los divisores propios de 12 son 1, 2, 3, 4 y 6, ya que son menores que 12 y dividen a 12 sin dejar residuo.

- **Divisores y múltiplos:** Existe una relación estrecha entre los divisores y los múltiplos. Si un número "b" es divisor de otro número "a", entonces "a" es múltiplo de "b". Por ejemplo, si 4 es divisor de 12, entonces 12 es múltiplo de 4.

- **Divisores de 1 y el número mismo:** Todo número entero es divisible por 1 y por sí mismo. Estos son los divisores triviales de cualquier número. Por ejemplo, 1 y 5 son divisores triviales de 5, ya que 5 dividido por 1 es 5 y 5 dividido por 5 es 1.

- **Divisores primos:** Los divisores primos son aquellos que son números primos. Un número primo solo tiene dos divisores: 1 y el propio número primo. Por ejemplo, los divisores del número primo 7 son 1 y 7.

El cálculo de los múltiplos y divisores comunes a varios números es una operación importante en matemáticas y se utiliza para encontrar números que sean tanto múltiplos como divisores de un conjunto de números dados.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Estos números comunes son útiles en diversas aplicaciones, como, por ejemplo:

Simplificación de fracciones.

Problemas de proporciones.

Buscar factores comunes.

Aplicaciones de la descomposición de números.

A continuación, explicaremos cómo realizar el cálculo de los múltiplos y divisores comunes a varios números:

- **Múltiplos comunes:**
  - **Identificación de los números:** Para calcular los múltiplos comunes, se deben identificar los números involucrados. Por ejemplo, si tenemos los números 6, 8 y 12, queremos encontrar los múltiplos comunes de estos números.
  - **Cálculo de los múltiplos:** A continuación, se deben calcular los múltiplos de cada número individualmente. Por ejemplo, los múltiplos de 6 son 6, 12, 18, 24, 30, etc.; los múltiplos de 8 son 8, 16, 24, 32, 40, etc.; y los múltiplos de 12 son 12, 24, 36, 48, etc.
  - **Identificación de los múltiplos comunes:** Finalmente, se deben identificar los números que aparecen en las listas de múltiplos de todos los números. En el ejemplo dado, el número 24 es un múltiplo común de 6, 8 y 12.
- **Divisores comunes:**
  - **Identificación de los números:** Para calcular los divisores comunes, se deben identificar los números involucrados. Por ejemplo, si tenemos los números 24, 36 y 48, queremos encontrar los divisores comunes de estos números.
  - **Cálculo de los divisores:** A continuación, se deben calcular los divisores de cada número individualmente. Por ejemplo, los divisores de 24 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24; los divisores de 36 son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36; y los divisores de 48 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48.
  - **Identificación de los divisores comunes:** Finalmente, se deben identificar los números que aparecen en las listas de divisores de todos los números. En el ejemplo dado, los divisores comunes de 24, 36 y 48 son 1, 2, 3, 4, 6, 12 y 24.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

3.4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.): PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO.

El **máximo común divisor** de dos números enteros "a" y "b" es el número entero más grande que divide a ambos números sin dejar residuo. Por ejemplo, el máximo común divisor de 12 y 18 es 6, ya que 6, es el número más grande que divide a ambos números sin dejar residuo.

Las **propiedades** principales del máximo común divisor son:

- **El máximo común divisor es siempre un número entero positivo.**
- **Si el máximo común divisor de dos números es 1, se les denomina primos relativos o coprimos.**
- **Si un número "a" es divisible por otro número "b", entonces su máximo común divisor es igual a "b".**
- **El máximo común divisor de un número es a y 0 es igual a a.**

Propiedades principales del máximo común divisor.

Los **métodos para calcular el máximo común divisor** son los siguientes:

- **Descomposición en factores primos:** Con este método se descomponen los números en factores primos y luego se eligen aquellos factores primos comunes con el menor exponente.

  Por ejemplo, si tenemos los números 24 y 36. Su descomposición en factores primos es 24 = 2^3 × 3^1 y 36 = 2^2 × 3^2. Luego, se toman los factores primos comunes con la menor exponente, que son 2^2 × 3^1 = 12. Por lo tanto, el MCD de 24 y 36 es 12.

- **Algoritmo de Euclides:** Se basa en el principio de que el máximo común divisor de dos números es igual al máximo común divisor del divisor más pequeño y el residuo de la división de los dos números. El proceso se repite hasta que el residuo sea cero, siendo el último divisor no nulo el máximo común divisor.

  Por ejemplo, para calcular el MCD de 48 y 18 utilizando el algoritmo de Euclides, se realizarían las siguientes divisiones sucesivas: 48 ÷ 18 = 2 con residuo 12, 18 ÷ 12 = 1 con residuo 6, y 12 ÷ 6 = 2 con residuo 0. Como el último residuo es cero, el MCD es 6.

Sus principales aplicaciones son:

1. Simplificación de fracciones.
2. Cálculo de fracciones equivalentes.
3. Resolución de ecuaciones.

Aplicaciones principales del máximo común divisor.

Los **pasos para calcular el máximo común divisor** son los siguientes:

- **Descomponer en factores primos:** Se descompone cada uno de los números en factores primos. Escribiremos los números en forma de multiplicación de sus factores primos. Por ejemplo, si se quiere calcular el máximo común divisor de 24 y 36, se descomponen ambos números en factores primos: $24 = 2^3 \times 3^1$ y $36 = 2^2 \times 3^2$.

- **Identificación de factores primos comunes:** Se identifican los factores primos que son comunes a todos los números. Observaremos los exponentes de los factores primos y encontraremos los factores primos que están presentes en todos los números. En el ejemplo anterior, los factores primos comunes son 2^2 y 3^1.

- **Cálculo del producto:** Elegiremos los factores primos comunes con la menor exponente y los multiplicaremos. En el ejemplo anterior, el producto de los factores primos comunes es $2^2 \times 3^1 = 12$.

- **Resultado:** El resultado obtenido en el paso anterior es el máximo común divisor de los números originales. En este caso, el máximo común divisor de 24 y 36 es 12.

Por otro lado, el **mínimo común múltiplo** de dos o más números enteros "a" y "b" es el número entero más pequeño divisible entre ambos números. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12, ya que 12 es el número más pequeño que es divisible tanto por 4 como por 6.

Sus **propiedades** principales son:

- El mínimo común múltiplo siempre es un número entero positivo.

- En caso de que los números primos, es decir, con máximo común divisor 1, su mínimo común múltiplo es igual que el producto de los números.

- El mínimo común múltiplo de dos números "a" y "b" siempre es mayor o igual al valor absoluto de los números individuales.

- El mínimo común múltiplo de dos números "a" y "b" es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente.

Los **métodos principales para calcular el mínimo común múltiplo** son:

- **Método de descomposición en factores primos:** Igual que con el cálculo del máximo común divisor, se pueden descomponer los números en factores primos y luego elegir los factores primos con la mayor exponente para calcular el mínimo común múltiplo.

  Por ejemplo, si se quiere calcular el mínimo común múltiplo de 8 y 12, será necesario descomponer ambos números en factores primos: 8 = 2^3 y 12 = 2^2 × 3^1. A continuación, se eligen los factores primos con la mayor exponente, que son 2^3 y 3^1, y se multiplican. En el ejemplo anterior, el resultado sería 2^3 × 3^1 = 24.

- **Utilizando el máximo común divisor:** Otra forma de calcular el mínimo común múltiplo es utilizando el máximo común divisor. La relación entre el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor se puede expresar como el producto de los números.

  Por ejemplo, a y b, y dividiendo el resultado por el máximo común divisor, es decir, (a*b)/(máximo común divisor).

Sus principales aplicaciones son:

1. Operaciones con fracciones.
2. Resolución de problemas de proporciones.
3. Calcular periodos y ciclos.

Aplicaciones principales del mínimo común múltiplo.

Los **pasos para calcular el mínimo común múltiplo** son los siguientes:

- **Identifica los números:** Elegiremos los números a los que cuales deseamos encontrar el mínimo común múltiplo.
- **Descompondremos los números en factores primos:** Para ello descomponemos cada número en su forma de multiplicación de factores primos. Esto implica descomponer cada número en una multiplicación de potencias de números primos. Por ejemplo, si tenemos el número 24, puedes descomponerlo como 2^3 × 3^1.
- **Identificamos los factores primos:** Identificaremos todos los factores primos presentes en la descomposición de los números. Nos aseguraremos de incluir todos los factores primos distintos, pero no repetiremos factores primos comunes.
- **Determinaremos los exponentes máximos:** Para ello encontraremos el exponente máximo para cada factor primo identificado. Esto se consigue eligiendo el exponente más grande de ese factor primo entre los números que estás considerando. Si un factor primo no está presente en alguno de los números, su exponente máximo es 0.
- **Calculamos el producto:** Tomamos todos los factores primos identificados y los multiplicamos, elevando cada factor a su exponente máximo. Esto nos dará el producto de los factores primos.
- **El resultado es el mcm:** El resultado obtenido en el paso anterior es el mínimo común múltiplo de los números originales.

3.5. APLICACIONES DE LA DIVISIBILIDAD Y USO DEL M.C.D. Y DEL M.C.M. EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ASOCIADOS A SITUACIONES COTIDIANAS.

En el siguiente ejemplo veremos una aplicación práctica de la **divisibilidad** en la resolución de problemas asociados a situaciones de la vida cotidiana.

Imaginemos que Ana está organizando una fiesta de cumpleaños para su hijo. Quiere repartir los regalos entre los niños de manera equitativa, pero sólo tiene bolsas de regalos de 4 juguetes en cada una. Ana quiere saber cuántas bolsas de regalos necesita para asegurarse de que todos los juguetes se repartan sin sobrar ninguno.

La resolución paso a paso es la siguiente:

1. El primer paso consistirá en identificar la cantidad total de juguetes disponibles: Supongamos que Ana tiene 24 juguetes en total para repartir.

2. Después habrá que determinar si la cantidad total de juguetes es divisible por el número de juguetes por bolsa: En nuestro caso, Ana tiene 24 juguetes y cada bolsa contiene 4 juguetes. Para que todos los juguetes se repartan sin que sobre ninguno, necesitamos que la cantidad total de juguetes sea divisible entre 4.

3. Para que un número sea divisible por 4, debe ser divisible por 2 dos veces consecutivas. Esto significa que el número formado por las últimas dos cifras debe ser divisible por 4. En este caso, las últimas dos cifras del número 24 son 4, que es divisible por 4.

4. Para terminar, como la cantidad total de juguetes (24) es divisible entre 4, podemos concluir que Ana necesitará 24/4 = 6 bolsas de regalos para asegurarse de que todos los juguetes se repartan sin que sobre ninguno.

Por tanto, para repartir los juguetes de manera equitativa, Ana necesitará 6 bolsas de regalo, ya que cada bolsa contiene 4 juguetes y la cantidad total de juguetes disponibles es divisible por 4. De esta manera, todos los niños recibirán un regalo y no sobrará ninguno.

A continuación, en el siguiente ejemplo veremos una aplicación práctica en la vida real del **máximo común divisor.**

Carlos está organizando una fiesta y quiere colocar globos de diferentes colores como decoraciones iguales en cada mesa. Tiene globos rojos y globos azules y quiere saber cuántos globos puede colocar en cada centro de mesa sin que sobre ninguno en ninguna mesa.

La resolución paso a paso es la siguiente:

1. Identificar la cantidad de globos rojos y azules: Supongamos que Carlos tiene 36 globos rojos y 48 globos azules.

2. Habría que calcular el máximo común divisor de los dos números, es decir, de 36 y de 48.

   - Método 1: Utilizando el algoritmo de Euclides:

     Divide 48 por 36: $48 = 36 \times 1 + 12$.

     Divide 36 por 12: $36 = 12 \times 3 + 0$.

     El último divisor distinto de cero es 12, por lo que el máximo común divisor de 36 y 48 es 12.

   - Método 2: Utilizando la descomposición en factores primos:

     Descompón 36 y 48 en factores primos:

     36 = 2^2 × 3^2.

     48 = 2^4 × 3^1.

- Elige los factores primos con la menor exponente común:

  Por tanto, el máximo común divisor de 36 y 48 será igual a = 2^2 × 3^1 = 12.

3. Por tanto, el máximo común divisor de 36 y 48 es 12. Esto significa que Carlos puede colocar 12 globos en cada centro de mesa de manera equitativa sin que sobre ninguno.

En el siguiente ejemplo veremos una aplicación práctica en la vida real del **mínimo común múltiplo.**

Laura está organizando un torneo de fútbol para su instituto y necesita asignar los horarios de entrenamiento para los equipos. Los entrenamientos deben llevarse a cabo en intervalos regulares y Laura quiere calcular el mínimo común múltiplo de dos horas para programar los entrenamientos.

La resolución del problema paso a paso es la siguiente:

1. Laura deberá identificar las horas disponibles para los entrenamientos: Supongamos que Laura desea programar entrenamientos en intervalos de 3 horas y 4 horas.

2. Calcula el mínimo común múltiplo de las horas, es decir, el mínimo común múltiplo de 3 y 4.

Esto se puede hacer de dos formas:

- Método 1: Utilizando la descomposición en factores primos:

  Descompón 3 y 4 en factores primos:

  3 = 3^1.

  4 = 2^2.

  Selecciona los factores primos con la mayor exponente en cualquier número:

  Mínimo común múltiplo de 3 y 4 = 2^2 × 3^1 = 12.

- Método 2: Observando los múltiplos de los números:

  Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, etc.

  Los múltiplos de 4 son: 4, 8, 12, 16, 20, etc.

  El primer múltiplo común que aparece en ambas listas es 12.

  Por lo tanto, el mínimo común múltiplo de 3 y 4 es 12.

Esto quiere decir que Laura puede programar los entrenamientos en intervalos de 12 horas para asegurarse de que los equipos tengan sesiones de entrenamiento regulares sin que se superpongan.

Ideas clave

- Los **números naturales** son aquellos números enteros positivos utilizados para contar y ordenar. Tienen propiedades como la cerradura, por la que la suma o multiplicación de dos números naturales siempre da como resultado otro número natural; y la propiedad del orden, que establece que los números naturales se pueden ordenar de manera creciente.
- Los **números primos** son aquellos números naturales mayores que 1 que solo son divisibles por sí mismos y por 1.
- Los **números compuestos** son aquellos números naturales mayores que 1 que tienen más de dos divisores.
- La **descomposición factorial** es el proceso de expresar un número como el producto de sus factores primos. Esto nos permite analizar su estructura y desglosar el número en sus componentes fundamentales.
- Las **reglas de divisibilidad** son pautas o criterios que nos permiten determinar si un número es divisible por otro sin realizar la división completa.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

- Los números naturales, múltiplos, divisores, mínimo común múltiplo tienen diferentes **aplicaciones prácticas**, como en la simplificación de fracciones, la resolución de problemas de reparto equitativo, el cálculo de fracciones equivalentes y la resolución de problemas de proporcionalidad.

Glosario

- **Divisor:** Número que divide exactamente a otro número sin dejar residuo. Un divisor divide a otro número sin dejar residuo si la división es exacta.
- **Máximo común divisor:** El número más grande que divide exactamente a dos o más números.
- **Mínimo común múltiplo:** El número más pequeño que es múltiplo común de dos o más números.
- **Múltiplo:** Resultado de la multiplicación de un número por otro entero. Un número es múltiplo de otro si se puede obtener multiplicando ese número por un entero.
- **Número natural:** Cualquier número entero positivo, sin incluir el cero.

Referencias bibliográficas

- Beckmann, S. (2017). *Matemáticas para maestros de primaria con actividades.* Editorial Pearson Educación.
- Jones, G. A., Jones, J. M. (2017). *Teoría elemental de números.* Editorial Reverté.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2018). *Matemáticas para escuelas primarias e intermedias: enseñanza de desarrollo.* Editorial Pearson Educación.
- Shillito, C. (2011). *Investigando múltiplos y divisores: enlace entre la teoría de números y la geometría*. Journal of Mathematics Education.
- Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I. (2009). *Teoría de números: estructuras, ejemplos y problemas.* Editorial XYZ.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Enlaces web de interés

- Números naturales.
- Divisibilidad, múltiplos y divisores.
- Mínimo común múltiplo.
- Máximo común divisor.
- Números naturales y operaciones.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU

MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

Castilla-La Mancha