Competencia matemática
Competencias clave

Nivel 3

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU

MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL

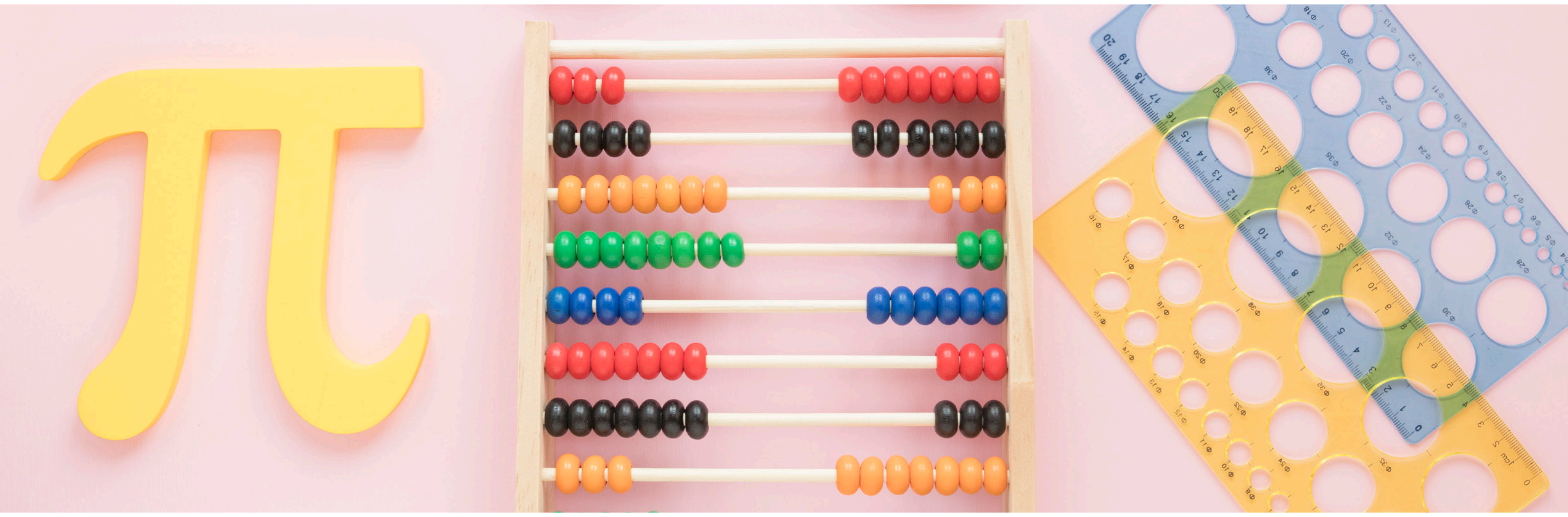
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

Castilla-La Mancha

Índice de contenidos

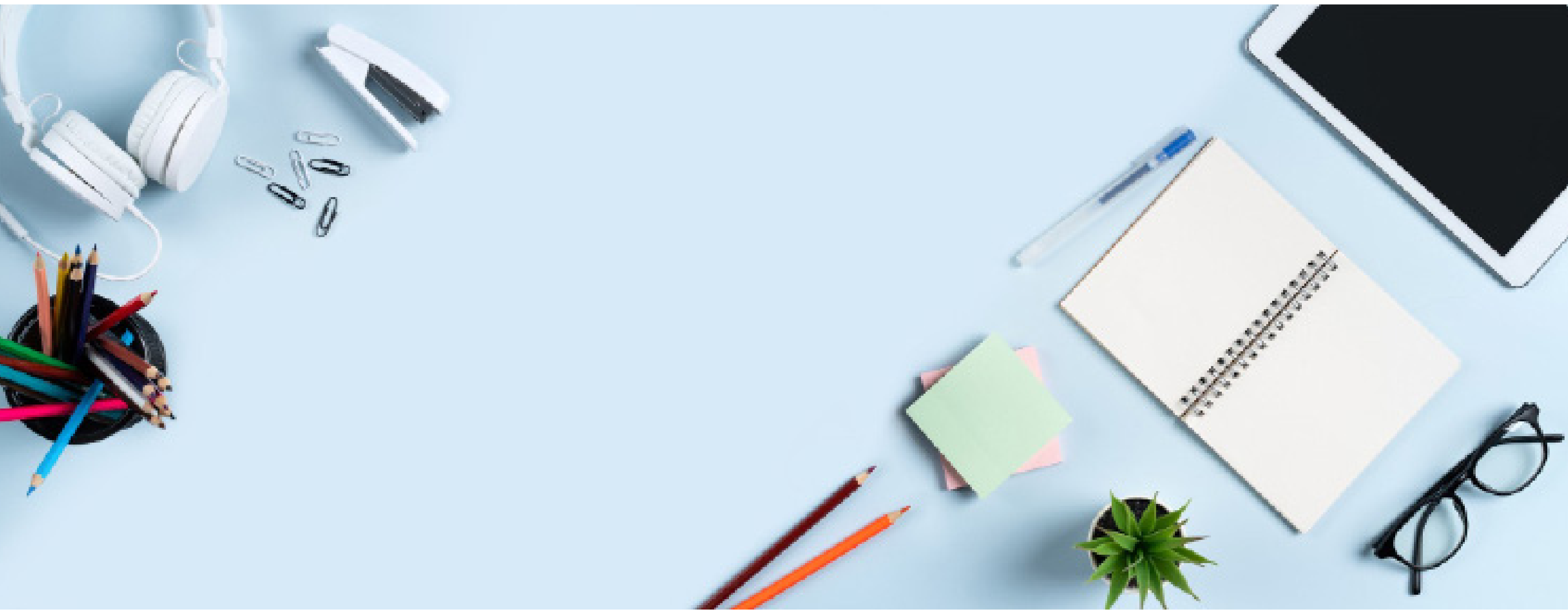
BLOQUE I: UTILIZACIÓN DE LOS NÚMEROS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

UD1.1: NÚMEROS RACIONALES.



Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Presentación



Los números racionales son una parte esencial de las matemáticas que se encuentra en nuestro día a día. Estos números incluyen todas las fracciones y números enteros y se representan como cocientes de dos enteros. Los números racionales pueden expresar cantidades precisas y son fundamentales en áreas como la física, la economía y la geometría.

En esta unidad didáctica analizaremos en detalle los números racionales. Conoceremos sus propiedades y cómo realizar operaciones con ellos. Repasaremos conceptos clave como fracciones equivalentes y simplificación. Además, exploraremos su aplicación en problemas reales y en situaciones cotidianas. Estaremos preparados para comprender y trabajar con números racionales de manera efectiva.

Al final de esta unidad didáctica, dominarás por completo los números racionales. Conocerás sus propiedades y cómo utilizarlos en cálculos y problemas matemáticos. Podrás simplificar fracciones de manera intuitiva y resolver ecuaciones que involucren números racionales.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Objetivos

- Comprender las propiedades de los números enteros y naturales, como la conmutatividad y la distributividad, para aplicarlas en operaciones matemáticas.
- Realizar cálculos precisos y eficientes con números enteros y naturales, incluyendo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.
- Representar números enteros y naturales de manera efectiva, utilizando diagramas, rectas numéricas y notación numérica para visualizar su posición y magnitud.
- Resolver problemas prácticos que involucren números enteros y naturales, aplicando estrategias matemáticas para abordar situaciones cotidianas.
- Identificar las diferencias fundamentales entre números enteros y naturales, reconociendo sus propiedades y aplicaciones específicas en contextos matemáticos y del mundo real.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

1. UNIDADES RACIONALES.

1. NÚMEROS NATURALES.

1.1. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO NATURAL EN FACTORES PRIMOS.

Los **números naturales** son un **concepto matemático fundamental** que nos rodea en todas partes, y tienen una historia rica y profunda que se remonta a la antigüedad.

Los números naturales son un conjunto de números **enteros no negativos** que comienzan desde el 1 y se extienden infinitamente hacia arriba. En otras palabras, son números que usamos para **contar objetos o representar una cantidad** que no puede ser negativa. Los números naturales se representan comúnmente con el conjunto **de símbolos "N".**

La forma más simple de representar números naturales es mediante el uso de **dígitos numéricos**, como 1, 2, 3, 4, 5, etc. Estos números son intuitivos y se utilizan ampliamente en situaciones cotidianas para contar objetos, contar años de vida, calcular puntuaciones y más.

Las características principales son:

- **Ordenación:** Los números naturales están ordenados de **manera ascendente**. Cada número natural es mayor que el anterior en la secuencia. Por ejemplo, 2 es mayor que 1, 3 es mayor que 2, etc.

- **Infinitud:** Los números naturales **no tienen un límite superior.** No importa cuán grande sea un número natural, siempre puedes encontrar otro número natural que sea aún más grande. Esto se debe a que la secuencia de números naturales es infinita.

- **No negativos:** Los números naturales son **números enteros no negativos.** Esto significa que no pueden ser fracciones ni números decimales, y **nunca pueden ser negativos**. Siempre son **iguales o mayores que cero.**

Las **operaciones principales** a realizar con números enteros son:

Adición.

Sustracción.

Multiplicación.

División.

Operaciones con números enteros.

- **Adición:** La adición es una operación fundamental que se realiza con **números naturales.** Cuando sumas dos o más números naturales, obtienes otro número natural como resultado. Por ejemplo, 3 + 4 = 7. Esto significa que si tienes 3 objetos y luego agregas 4 más, tendrás un total de 7 objetos.

- **Sustracción:** La sustracción es otra operación que se puede realizar con números naturales, **pero con una limitación.** Si restas un número natural de otro número natural, el resultado puede ser otro número natural o cero. Por ejemplo, 5 - 3 = 2. Sin embargo, no puedes restar un número mayor de un número menor y obtener un número natural, como 3 - 5, ya que, en ese caso, obtendrías un número negativo.

- **Multiplicación:** La multiplicación es una operación que **combina dos o más números naturales** para obtener un resultado llamado **producto**. Por ejemplo, 2 x 3 = 6. Esto significa que si tienes 2 grupos de 3 objetos cada uno, tendrás un total de 6 objetos en total.

- **División:** La división es una operación que se utiliza para repartir una cantidad en **partes iguales.** Cuando divides un número natural entre otro número natural, obtienes un cociente y, en algunos casos, **un residuo.** Por ejemplo, 8 ÷ 2 = 4. Esto significa que, si tienes 8 objetos, y los divides en 2 grupos iguales, cada grupo tendrá 4 objetos.

Estas operaciones tienen varias **propiedades principales:**

Conmutatividad.

Asociatividad.

Elemento neutro.

Distributividad.

Cerradura.

Propiedades de las operaciones con números enteros.

- **Conmutatividad:** La propiedad conmutativa se aplica a la **adición y la multiplicación.** Significa que el orden en que sumas o multiplicas los números no afecta el resultado. Por ejemplo, a + b = b + a y a x b = b x a.
- **Asociatividad:** La propiedad asociativa también se aplica a la **adición y la multiplicación.** Esto significa que puedes agrupar los números de cualquier manera y, aun así, obtener el mismo resultado. Por ejemplo, (a + b) + c = a + (b + c) y (a x b) x c = a x (b x c).
- **Elemento Neutro:** En la adición, **el número natural 0 actúa como el elemento neutro,** lo que significa que a + 0 = a para cualquier número natural "a". En la multiplicación, el número natural 1 es el elemento neutro, es decir, a x 1 = a para cualquier número natural "a".
- **Distributividad:** La propiedad distributiva relaciona la **adición y la multiplicación**. Esta propiedad establece que a x (b + c) = (a x b) + (a x c) para cualquier número natural "a", "b" y "c".
- **Cerradura:** La suma o multiplicación de dos números naturales siempre **da como resultado otro número natural.** Por lo tanto, las operaciones con números naturales son "cerradas" dentro del conjunto de números naturales.

Importante

Las operaciones principales que se pueden realizar con números enteros son la adicción, la sustracción, la multiplicación y la división. Estas operaciones tienen una serie de propiedades, que son conmutatividad, asociatividad, elemento neutro, distributividad y cerradura.

Además de estas propiedades y operaciones, los números naturales poseen otras:

- **Primalidad:** Los números naturales pueden clasificarse como primos o compuestos. Los **números primos** son aquellos que tienen exactamente dos divisores: 1 y sí mismos (por ejemplo, 2, 3, 5, 7). Los **números compuestos** tienen más de dos divisores (por ejemplo, 4, 6, 8).
- **Factorización:** La factorización se refiere a la **descomposición** de un número natural en sus factores primos. Esta propiedad es esencial en la teoría de números y se utiliza para simplificar fracciones y encontrar soluciones a problemas matemáticos.
- **Sucesiones numéricas:** Los números naturales también se utilizan para crear sucesiones numéricas, como la **sucesión de Fibonacci** (1, 1, 2, 3, 5, 8...) y la **sucesión de cuadrados perfectos** (1, 4, 9, 16, 25...). Estas sucesiones tienen aplicaciones en matemáticas y otras disciplinas.
- **Cardinalidad:** Los números naturales se utilizan para representar la **cardinalidad o cantidad de elementos en un conjunto.** Por ejemplo, si un conjunto tiene 5 elementos, se dice que su cardinalidad es 5.
- **Exponentes:** Los números naturales se utilizan en notación de exponentes para expresar **números grandes de manera concisa.** Por ejemplo, 10^3 representa 1.000 (diez elevado a la tercera potencia).
- **Sumas y Productos:**
  - **Suma de los primeros N números naturales:** La suma de los primeros "n" números naturales se puede calcular mediante la fórmula: $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$. Esta fórmula es útil para calcular sumas de números naturales consecutivos.

- **Producto de los primeros N números naturales:** El producto de los primeros "n" números naturales se puede calcular mediante la fórmula: 1 x 2 x 3 x ... x n = n!. Este producto se llama **"n factorial"** y es una notación común en matemáticas.

Para comprender la descomposición en factores primos, primero debemos conocer dos conceptos clave: **los números primos y los factores primos:**

- **Números primos:** Un número primo es un número natural mayor que 1 que solo tiene **dos divisores exactos**: 1 y sí mismo. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, y así sucesivamente.

  Los números primos son los **"bloques de construcción"** fundamentales de los números naturales, ya que todos los números naturales pueden descomponerse en una multiplicación de números primos.

- **Factores primos:** Los factores primos son números primos que **se multiplican para formar un número natural dado.** Por ejemplo, si consideramos el número natural 12, se puede descomponer en sus factores primos de la siguiente manera: 12 = 2 x 2 x 3. Aquí, 2 y 3 son los factores primos de 12.

  La factorización en factores primos implica encontrar estos números primos que, cuando se multiplican, dan como resultado el número original.

La **descomposición en factores primos** implica seguir una serie de pasos sistemáticos para encontrar los factores primos de un número natural dado. Aquí están los pasos básicos:

- **Paso 1:** Comienza con el **número natural** que deseas descomponer en factores primos.
- **Paso 2: Identifica el número primo** más pequeño que divide exactamente al número. Si el número es primo en sí mismo, ese número es su factor primo.
- **Paso 3: Divide el número original por el factor primo encontrado en el Paso 2.** Esto te dará un cociente y un residuo. Si el residuo es cero, continúa dividiendo el cociente. Si el residuo no es cero, pasa al siguiente número primo y repite el proceso.
- **Paso 4: Continúa dividiendo** hasta que el cociente sea igual a 1 y no queden residuos. En este punto, has encontrado todos los factores primos del número original.
- **Paso 5: Escribe la descomposición en factores primos** utilizando la notación de multiplicación. Por ejemplo, si descompones el número 60, obtendrás la siguiente descomposición: 60 = 2 x 2 x 3 x 5.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Ahora, veamos un ejemplo paso a paso de cómo descomponer el número 84 en factores primos:

- **Paso 1:** Comenzamos con el número 84.
- **Paso 2:** El número primo más pequeño que divide a 84 es 2, ya que 84 es par.
- **Paso 3:** Dividimos 84 por 2, lo que nos da un cociente de 42 sin residuo.
- **Paso 4:** Continuamos dividiendo 42. El número primo más pequeño que divide a 42 es nuevamente 2. Dividimos 42 por 2, obteniendo un cociente de 21 sin residuo.
- **Paso 5:** Continuamos dividiendo 21. El número primo más pequeño que divide a 21 es 3. Dividimos 21 por 3, obteniendo un cociente de 7 sin residuo.
- **Paso 6:** Ahora tenemos un cociente de 7, que es un número primo en sí mismo.
- **Paso 7:** Hemos encontrado todos los factores primos. Escribimos la descomposición en factores primos: 84 = 2 x 2 x 3 x 7.

Hemos descompuesto el número 84 en sus factores primos, que son 2, 2, 3 y 7. Estos factores primos, cuando se multiplican, dan como resultado el número original 84.

La descomposición en factores primos tiene algunas propiedades importantes:

Unicidad.

Cálculo de múltiplos y divisores.

Comparación de fracciones.

Propiedades de la descomposición en factores primos.

- **Unicidad:** La factorización en factores primos de un número **es única**, lo que significa que cualquier número natural se puede descomponer de una sola manera en una multiplicación de números primos. Esto es análogo al teorema fundamental de la aritmética.
- **Cálculo de múltiplos y divisores:** La descomposición en factores primos **facilita el cálculo** de múltiplos y divisores de un número. Si tienes la factorización en factores primos de un número, puedes calcular fácilmente sus múltiplos y divisores.

- **Comparación de fracciones:** La factorización en factores primos es útil para **comparar fracciones**. Si tienes dos fracciones y conoces sus descomposiciones en factores primos, puedes determinar cuál es mayor o si son equivalentes.

Recuerda

La descomposición en factores primos tiene multitud de aplicaciones como la criptografía, las matemáticas avanzadas, las ciencias de la computación, el estudio de divisibilidad, etc.

1.2. MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.

El **Máximo Común Divisor (MCD)** de dos o más números enteros es el **número entero más grande** que es un divisor común de todos esos números. En otras palabras, es el número más grande que puede dividir a todos los números en cuestión sin dejar un residuo.

Por ejemplo, si tenemos los números 12 y 18, el MCD de 12 y 18 es 6, ya que 6 es el número más grande que puede dividir tanto a 12 como a 18 sin dejar un residuo.

El Máximo Común Divisor (MCD) tiene varias propiedades importantes que lo hacen útil en una variedad de situaciones matemáticas y prácticas:

- **Propiedad de divisibilidad.**
- **Propiedad de multiplicación.**
- **Propiedad de monoides.**
- **MCD de números primos.**

Propiedades importantes MCD.

- **Propiedad de divisibilidad:** Si un número "x" es divisor de otros números "a" y "b", entonces "x" también es divisor del MCD de "a" y "b". Esto significa que el MCD es el número más grande que puede dividir a "a" y "b" sin dejar un residuo.

- **Propiedad de multiplicación:** El MCD de dos números "a" y "b" multiplicado por su Mínimo Común Múltiplo (MCM) es igual al producto de "a" y "b". Esta propiedad se expresa como MCD(a, b) x MCM(a, b) = a x b.

- **Propiedad de monoides:** El conjunto de números enteros positivos, junto con la operación de MCD, forma una estructura algebraica llamada monoides. Esto significa que **cumple con la propiedad de cierre** (el MCD de dos números enteros siempre es un número entero positivo), **la propiedad de asociatividad** (MCD(a, MCD(b, c)) = MCD(MCD(a, b), c)), y **tiene un elemento neutro** (el MCD de un número con 1 es el propio número).

- **MCD de números primos:** El MCD de dos números primos diferentes **siempre es igual a 1**, ya que no tienen otros divisores comunes además de 1.

Para **calcular el MCD** se deben seguir los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Descompone todos los números en factores primos. Por ejemplo, para calcular el MCD de 36 y 48, descompón ambos números en factores primos:

36 = 2^2 x 3^2

48 = 2^4 x 3

- **Paso 2:** Identifica los factores primos comunes con los exponentes más bajos. En este caso, el factor primo común es 2 elevado a la segunda potencia (2^2).

- **Paso 3:** Multiplica los factores primos comunes identificados. En este caso, el MCD es 2^2, que es igual a 4.

El **Mínimo Común Múltiplo (MCM)** de dos o más números enteros es el número entero **más pequeño que es múltiplo común** de todos esos números. En otras palabras, es el número más pequeño que es divisible por cada uno de los números dados sin dejar un residuo.

Por ejemplo, si tenemos los números 4 y 6, el MCM de 4 y 6 es 12, ya que 12 es el número más pequeño que es múltiplo tanto de 4 como de 6 sin dejar un residuo.

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) tiene varias **propiedades importantes** que lo hacen útil en una variedad de situaciones matemáticas y prácticas.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Estas propiedades incluyen:

Simplificación de fracciones.

Problemas de proporciones.

Buscar factores comunes.

Propiedades MCM.

- **Propiedad de divisibilidad:** Si un número "x" es múltiplo de otros números "a" y "b", entonces "x" también es múltiplo del MCM de "a" y "b". Esto significa que el MCM es el número más pequeño que es múltiplo de "a" y "b", y, por lo tanto, es divisible por ambos números.

- **Propiedad de compatibilidad con el Máximo Común Divisor (MCD):** El producto del MCM y el MCD de dos números "a" y "b" es igual al producto de los propios números "a" y "b". Esto se expresa como MCM(a, b) x MCD(a, b) = a x b.

- **Propiedad de monoides:** Al igual que el MCD, el conjunto de números enteros positivos, junto con la operación de MCM, forma una estructura algebraica llamada monoides. Esto significa que **cumple con la propiedad de cierre** (el MCM de dos números enteros siempre es un número entero positivo), **la propiedad de asociatividad** (MCM(a, MCM(b, c)) = MCM(MCM(a, b), c)), y **tiene un elemento neutro** (el MCM de un número con 1 es el propio número).

Para calcular el MCM se siguen los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Descompone todos los números en factores primos. Por ejemplo, para calcular el MCM de 8 y 12, descompón ambos números en factores primos:

8 = 2^3

12 = 2^2 x 3

- **Paso 2:** Identifica los factores primos involucrados en las descomposiciones. En este caso, los factores primos son 2 y 3.

- **Paso 3:** Considera los exponentes más altos de los factores primos identificados. En este caso, el exponente más alto de 2 es 3 y el exponente de 3 es 1.
- **Paso 4:** Multiplica los factores primos con sus exponentes más altos. En este caso, el MCM es 2^3 x 3^1, que es igual a 24.

Recuerda

El Mínimo Común Múltiplo es un concepto matemático esencial con una amplia gama de aplicaciones en diversos campos. Su capacidad para encontrar el múltiplo común más pequeño de números enteros lo convierte en una herramienta valiosa en matemáticas, ciencias aplicadas, programación de computadoras y finanzas.

2. NÚMEROS ENTEROS.

2.1. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Los **números enteros** son un conjunto de números que incluye tanto los números **positivos como los números negativos**, además del **cero**. Los números enteros se representan con el **símbolo Z** (del alemán "Zahlen", que significa "números"). Formalmente, el conjunto de números enteros se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}}$$

En esta definición, los **puntos suspensivos** indican que los números enteros continúan infinitamente en ambas direcciones, tanto hacia los números negativos como hacia los números positivos.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Las principales propiedades de los números enteros son:

- **Cerradura bajo suma y resta.**
- **Cerradura bajo multiplicación.**
- **Propiedad distributiva.**
- **Orden de los números enteros.**
- **Simetría en la recta numérica.**
- **Identidad aditiva.**
- **Inverso aditivo.**
- **Inverso multiplicativo.**
- **Tricotomía.**
- **Propiedad de inducción matemática.**

Principales propiedades de los números enteros.

- **Cerradura bajo suma y resta:** La suma o resta de dos números enteros siempre produce otro número entero. Por ejemplo, 3 + (-5) = -2 es un número entero.
- **Cerradura bajo multiplicación:** La multiplicación de dos números enteros también produce otro número entero. Por ejemplo, 4 x (-2) = -8, que es un número entero.

- **Propiedad distributiva:** La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y la resta se aplica a los números enteros. Por ejemplo, a(b + c) = ab + ac, donde "a," "b," y "c" son números enteros.

- **Orden de los números enteros:** Los números enteros se pueden ordenar en una recta numérica de manera que los números negativos estén a la izquierda del cero y los números positivos a la derecha. El número cero es el punto de partida en esta recta numérica.

- **Simetría en la recta numérica:** La recta numérica de los enteros es simétrica respecto al cero. Esto significa que por cada número entero positivo, hay un número entero negativo correspondiente con la misma distancia al cero. Por ejemplo, -3 está a la misma distancia del cero que 3, pero en la dirección opuesta.

- **Identidad aditiva:** El cero es el elemento identidad para la suma en el conjunto de números enteros. Para cualquier número entero "a", se cumple que "a + 0 = a" y "0 + a = a".

- **Inverso aditivo:** Cada número entero tiene un inverso aditivo que lo anula en la suma. Por ejemplo, el inverso aditivo de 3 es -3, ya que 3 + (-3) = 0.

- **Inverso multiplicativo:** Sin embargo, no todos los números enteros tienen inverso multiplicativo. Solo el 1 y el -1 tienen inversos multiplicativos en los enteros, que son ellos mismos y su opuesto: 1 y -1.

- **Tricotomía:** Dados dos números enteros "a" y "b", se cumple una de las siguientes relaciones: "a < b," "a = b," o "a > b". Esto significa que los números enteros se pueden comparar en términos de su magnitud.

- **Principio de inducción matemática:** Los números enteros son fundamentales en el principio de inducción matemática, una herramienta importante en la demostración de afirmaciones matemáticas.

La forma más común de representar números enteros es mediante la **notación numérica estándar**, que utiliza dígitos numéricos y signos matemáticos para **expresar valores enteros.** En esta notación, los **números positivos** se escriben simplemente como una secuencia de dígitos, y los **números negativos** se preceden con un signo negativo (-). Por ejemplo:

Números positivos: 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Números negativos: -1, -2, -3, -4, -5, etc.

El cero (0) es otro número entero importante y se utiliza para representar la **ausencia de cantidad o valor.**

La **recta numérica** es una representación visual de los números enteros que se utiliza para mostrar la **relación entre ellos y su posición relativa en una línea.** En la recta numérica, el cero se coloca en el **centro**, y los **números positivos** se extienden hacia la **derecha**, mientras que los **números negativos** se extienden hacia la **izquierda**. Cada número entero tiene una ubicación única en la recta numérica, lo que facilita la visualización de su orden y magnitud.

La recta numérica es una **herramienta valiosa** para comprender las operaciones matemáticas, como la suma y la resta de números enteros. Por ejemplo, si deseamos sumar 2 + (-3), podemos representar estos números en la recta numérica ubicando un punto en 2 y luego retrocediendo 3 unidades hacia la izquierda, lo que nos lleva a -1. Esta representación visual **ayuda a los estudiantes** a comprender la relación entre los números enteros y las operaciones que se realizan con ellos.

Además de la notación estándar, los números enteros también se pueden representar utilizando **símbolos matemáticos y letras.** Algunos ejemplos incluyen:

"n" o "x" para representar un número entero desconocido en una ecuación.

"a" y "b" en contextos algebraicos para representar constantes enteras.

Símbolos matemáticos especiales como **"π" (pi) o "e" (número de Euler),** que son números irracionales, aún se consideran enteros en ciertos contextos matemáticos.

Estos símbolos matemáticos se utilizan en ecuaciones, fórmulas y expresiones matemáticas para representar números enteros o desconocidos de una manera más general.

Los números enteros también se pueden representar visualmente en **gráficos y diagramas.** Algunas formas comunes de representación visual incluyen:

- **Barras y diagramas de barras:** Se utilizan barras de diferentes longitudes para representar cantidades enteras. Por ejemplo, en un diagrama de barras, se puede utilizar una barra de longitud 5 para representar el número 5.

Gráfico de barras.

- **Gráficos de línea:** Los gráficos de línea muestran la relación entre los números enteros a lo largo de un eje horizontal. Estos gráficos se utilizan comúnmente en estadísticas y análisis de datos.

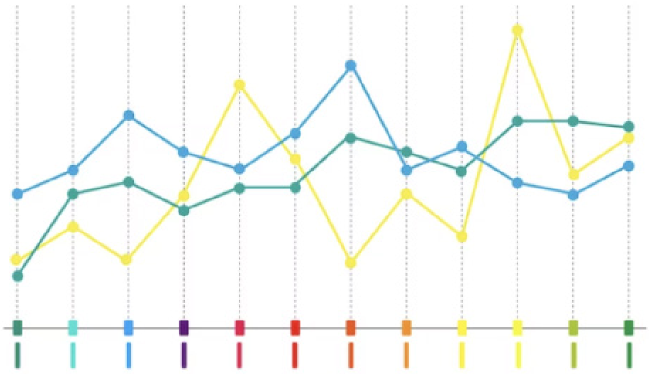


Gráfico de líneas.

- **Diagramas de Venn:** Los diagramas de Venn se utilizan para representar la intersección y la unión de conjuntos de números enteros. Pueden ser útiles para comprender conceptos de teoría de conjuntos.

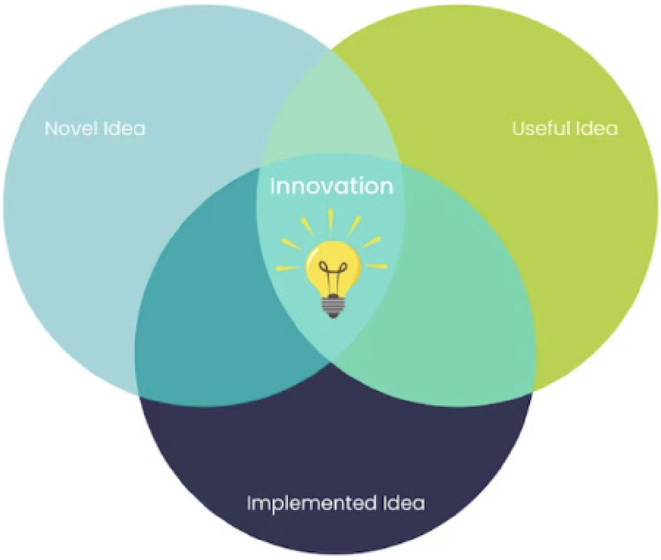


Diagrama de Venn.

- **Gráficos temperatura:** En meteorología y ciencias ambientales, se utilizan gráficos de barras de temperatura para representar temperaturas enteras en un período de tiempo determinado.

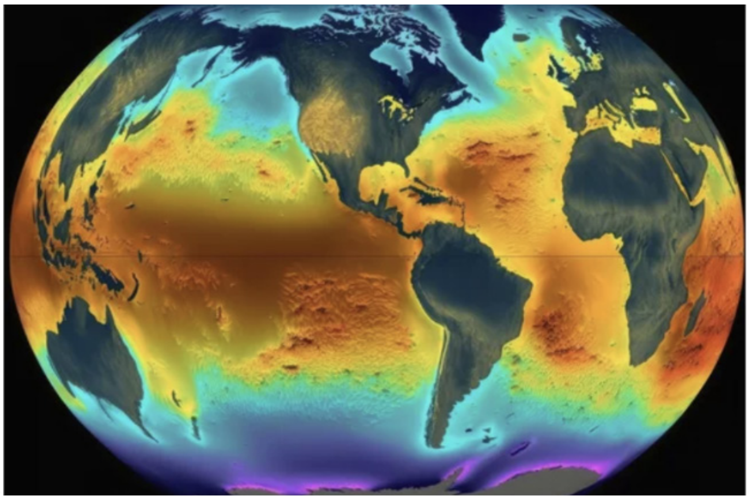


Gráfico de temperatura.

Recuerda

La recta numérica es una herramienta muy valiosa, puesto a que nos va a permitir ubicar un número entero en su ubicación exacta.

2.2. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS.

Las principales operaciones con números enteros son:

- **Suma.**
- **Resta.**
- **Multiplicación.**
- **División.**

Principales operaciones con números enteros.

La suma es una de las **operaciones más básicas** con números enteros y es fundamental para comprender cómo trabajar con ellos. Cuando sumamos dos números enteros, estamos **combinando sus valores** para obtener un resultado. Existen tres casos posibles cuando sumamos números enteros:

- **Suma de dos números positivos:** Cuando sumamos dos números enteros positivos, el resultado es un número entero positivo. Por ejemplo, 3 + 5 = 8. Esto significa que, si tienes 3 manzanas, y, luego, recibes 5 manzanas más, tendrás un total de 8 manzanas.

- **Suma de dos números negativos:** Cuando sumamos dos números enteros negativos, el resultado es un número entero negativo. Por ejemplo, -2 + (-4) = -6. Esto significa que, si debes 2 dólares, y, luego, debes 4 dólares más, debes un total de 6 dólares.

- **Suma de un número positivo y uno negativo:** Cuando sumamos un número positivo y un número negativo, el resultado dependerá de cuál de los dos números tiene un valor absoluto mayor. Si el número positivo tiene un valor absoluto mayor, el resultado será un número positivo; si el número negativo tiene un valor absoluto mayor, el resultado será un número negativo. Por ejemplo, 7 + (-3) = 4, ya que el 7 tiene un valor absoluto mayor que el 3.

La resta es otra operación importante con números enteros y se utiliza para encontrar la **diferencia entre dos números.** La resta de números enteros puede ser un poco más complicada que la suma debido a los diferentes casos que pueden surgir:

- **Resta de un número positivo y uno negativo:** Cuando restamos un número positivo y un número negativo, podemos pensar en ello como una suma. Si restamos un número negativo, es como sumar su valor absoluto. Por ejemplo, 5 - (-3) = 5 + 3 = 8. Esto significa que, si tienes 5 dólares, y, luego, te dan 3 dólares más, tendrás un total de 8 dólares.

- **Resta de dos números positivos:** Cuando restamos dos números enteros positivos, el resultado es un número positivo si el **número del minuendo** (el número del que se resta) es **mayor que el sustraendo** (el número que se resta). Por ejemplo, 8 - 3 = 5. Esto significa que, si tienes 8 manzanas, y, luego, te comes 3, te quedarán 5.

- **Resta de dos números negativos:** Cuando restamos dos números enteros negativos, el resultado puede ser positivo o negativo, dependiendo de cuál de los dos números tiene un valor absoluto mayor. Por ejemplo, -4 - (-7) = -4 + 7 = 3, ya que el 7 tiene un valor absoluto mayor que el 4. Por otro lado, -4 - (-2) = -4 + 2 = -2, ya que el 4 tiene un valor absoluto mayor que el 2.

La multiplicación es una operación que **combina dos números para encontrar su producto.** Cuando multiplicamos números enteros, debemos considerar las siguientes reglas:

- **Multiplicación de números con el mismo signo:** Cuando multiplicamos dos números enteros con el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos), el resultado es siempre un número entero positivo. Por ejemplo, 3 x 4 = 12 y (-2) x (-5) = 10. Esto refleja el hecho de que "multiplicar" es básicamente **repetir una cantidad un cierto número de veces,** y, si se repite una cantidad positiva o negativa varias veces, el resultado será positivo.

- **Multiplicación de números con signos diferentes:** Cuando multiplicamos dos números enteros con signos diferentes (uno positivo y uno negativo), el resultado siempre es **un número entero negativo.** Por ejemplo, (-3) x 6 = -18 y 5 x (-2) = -10. Esto refleja el hecho de que cuando se combina una cantidad positiva con una cantidad negativa, el resultado será negativo.

- **Multiplicación por cero:** Cualquier número entero multiplicado por cero es **igual a cero.** Por ejemplo, 0 x 7 = 0 y (-9) x 0 = 0. Esto significa que si multiplicamos cualquier número, ya sea positivo o negativo, por cero, el resultado siempre será cero.

La división es la operación inversa de la multiplicación y se utiliza **para repartir o distribuir una cantidad en partes iguales.** La división de números enteros puede ser un poco más compleja que otras operaciones debido a las reglas específicas que debemos seguir:

- **División de números con el mismo signo:** Cuando dividimos dos números enteros con el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos), el resultado es siempre un **número entero positivo o cero.** Por ejemplo, 8 ÷ 2 = 4 y (-10) ÷ (-5) = 2. Si la división **es exacta**, obtenemos un número entero positivo; **si no es exacta y hay un residuo,** el resultado será una fracción decimal.

- **División de números con signos diferentes:** Cuando dividimos dos números enteros con signos diferentes (uno positivo y uno negativo), el resultado siempre es un **número entero negativo o cero.** Por ejemplo, (-12) ÷ 4 = -3 y 9 ÷ (-3) = -3. Al igual que en el caso anterior, si la división es exacta, obtenemos un número entero negativo; si no es exacta y hay un residuo, el resultado será una fracción decimal.

- **División por cero:** La división por cero **no está definida** en los números enteros ni en ningún otro conjunto numérico. Es una operación indefinida porque no hay un número entero que represente el resultado de dividir cualquier número entre cero. Por ejemplo, no podemos calcular 5 ÷ 0 o (-3) ÷ 0 en los números enteros.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Las operaciones con números enteros obedecen a una serie de **propiedades** que son fundamentales para comprender cómo funcionan estas operaciones y cómo se relacionan entre sí. Estas son:

Propiedad conmutativa.

Propiedad asociativa.

Elemento neutro.

Propiedad distributiva.

Propiedad de elemento inverso.

- **Propiedad conmutativa:** La suma y la multiplicación de números enteros son conmutativas, lo que significa que **el orden de los números no afecta el resultado.** Por ejemplo, a + b = b + a y a x b = b x a.
- **Propiedad asociativa:** La suma y la multiplicación de números enteros son asociativas, lo que significa que **el agrupamiento de los números no afecta el resultado.** Por ejemplo, (a + b) + c = a + (b + c) y (a x b) x c = a x (b x c).
- **Elemento neutro:** En la suma, el **cero es el elemento neutro**, lo que significa que cualquier número entero sumado a cero es igual a sí mismo: a + 0 = a. En la multiplicación, el uno es el elemento neutro, lo que significa que cualquier número entero multiplicado por uno es igual a sí mismo: a x 1 = a.
- **Propiedad distributiva:** La multiplicación se distribuye sobre la suma, lo que significa que a x (b + c) = (a x b) + (a x c). Esta propiedad es fundamental en la simplificación de expresiones algebraicas y en la resolución de ecuaciones.
- **Propiedad del elemento inverso:** En la suma, cada número entero tiene un inverso aditivo que lo anula en la suma. Por ejemplo, para cualquier número entero "a," existe un número entero "-a" tal que a + (-a) = 0. En la multiplicación, solo el 1 y el -1 tienen inversos multiplicativos en los enteros.

2.3. USO DEL PARÉNTESIS Y DE LAS REGLAS DE PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES.

Los **paréntesis** son **símbolos de puntuación** utilizados en matemáticas y en lenguaje natural para indicar **agrupación o separación** en una expresión o enunciado. En matemáticas, los paréntesis tienen una serie de funciones importantes:

- **Agrupación de términos:** Los paréntesis se utilizan para **agrupar términos o factores** en una expresión matemática. Esto indica que los términos dentro de los paréntesis deben considerarse **juntos como una sola entidad** al realizar operaciones.

- **Prioridad de operaciones:** Los paréntesis pueden utilizarse para definir el **orden de las operaciones** en una expresión algebraica. Esto es especialmente importante cuando se combinan operaciones como la multiplicación, la división, la suma y la resta en una sola expresión.

- **Claridad y reducción de ambigüedad:** Los paréntesis ayudan a **evitar la ambigüedad** en las expresiones matemáticas, ya que indican claramente **cómo deben interpretarse los términos y las operaciones.**

Los **números enteros**, al igual que otros números, se pueden combinar y operar utilizando paréntesis para lograr una notación clara y precisa. Se utilizan principalmente en:

1. **Agrupación de términos en operaciones matemáticas:** Un uso común de los paréntesis en relación con números enteros es agrupar términos en operaciones matemáticas. Esto es especialmente útil cuando se realizan operaciones con números enteros en ecuaciones o expresiones algebraicas. Veamos algunos ejemplos:

   - Suma: (2) + (-3)

   En este caso, los paréntesis se utilizan para agrupar los números enteros 2 y -3 antes de realizar la suma. La expresión indica claramente que se suma 2 y -3, lo que resulta en -1.

   - Multiplicación: (-4) x (6)

   En este ejemplo, los paréntesis agrupan los números enteros -4 y 6 antes de realizar la multiplicación. La expresión representa la multiplicación de -4 por 6, lo que da como resultado -24.

2. **Orden de las operaciones:** Los paréntesis también se utilizan para definir el orden de las operaciones en expresiones algebraicas más complejas. **La regla mnemotécnica PEMDAS** (Paréntesis, Exponentes, Multiplicación y División -de izquierda a derecha-, y Suma y Resta -de izquierda a derecha-) es un ejemplo de **cómo los paréntesis tienen prioridad en la jerarquía de operaciones.**

Veamos un ejemplo que involucra números enteros y paréntesis:

- Suma y multiplicación: 2 x (3 + 4)

En esta expresión, los paréntesis indican que, primero, debemos realizar la operación dentro de ellos. Esto significa que, primero, sumamos 3 y 4 para obtener 7, y, luego, multiplicamos el resultado por 2 para obtener 14. La presencia de paréntesis asegura que la suma se realice antes de la multiplicación.

3. Los paréntesis también se utilizan ocasionalmente **para denotar números enteros negativos**. Por ejemplo:

   - Números negativos: (-5)

   En este caso, los paréntesis se utilizan para indicar que el número 5 es negativo. Esto es útil cuando se trabaja con números enteros y se desea enfatizar que un número es negativo en una expresión.

4. En ecuaciones con números enteros, los paréntesis se pueden utilizar **para agrupar términos en ambos lados de la ecuación.** Esto facilita la resolución de ecuaciones y la identificación de soluciones. Veamos un ejemplo:

   - Ecuación con paréntesis: 2x + (3 - 5) = 7

   En esta ecuación, los paréntesis agrupan los términos 3 y -5 en el lado izquierdo de la ecuación. La expresión dentro de los paréntesis se evalúa primero, lo que da como resultado -2. Luego, la ecuación se resuelve normalmente para encontrar el valor de "x".

5. En **problemas de modelado matemático** que involucran números enteros, los paréntesis pueden utilizarse para **definir relaciones y restricciones claras.** Por ejemplo:

   - **Problema de modelado con paréntesis:** En una competición de matemáticas, los puntos se otorgan de la siguiente manera:

     1. 3 puntos por respuesta correcta.
     2. 1 punto por respuesta en blanco.
     3. 0 puntos por respuesta incorrecta.

     Si un estudiante respondió correctamente a 5 preguntas, dejó 3 preguntas en blanco y respondió incorrectamente a 2 preguntas, ¿cuántos puntos obtuvo?

     Puntos = (5 x 3) + (3 x 1) + (2 x 0)

En este problema, los paréntesis se utilizan para definir claramente cómo se calculan los puntos. Primero, se multiplica el número de respuestas correctas por 3, luego el número de respuestas en blanco por 1, y, finalmente, el número de respuestas incorrectas por 0. Los paréntesis aseguran que las operaciones se realicen en el orden correcto.

6. **En matemáticas más avanzadas, como el cálculo y el álgebra lineal**, los paréntesis se utilizan para **agrupar términos y simplificar expresiones.** Estos pueden incluir números enteros junto con variables y funciones. Veamos un ejemplo:

   - Expresión algebraica avanzada con paréntesis: f(x) = 2(x^2 + 3x) - 4(2x - 5)

   En esta expresión algebraica, los paréntesis se utilizan para agrupar términos en ambas partes de la ecuación. Los paréntesis permiten simplificar la expresión y realizar cálculos más eficientes.

Las **reglas de prioridad de las operaciones** con números enteros son un conjunto de pautas que nos indican **el orden en el cual debemos realizar las operaciones matemáticas** cuando una expresión contiene varios tipos de operaciones. Estas reglas son esenciales para evitar ambigüedades y garantizar los resultados al resolver una expresión matemática.

1. **Primera prioridad: paréntesis.**

   La primera regla de prioridad en las operaciones matemáticas con números enteros es **resolver cualquier operación contenida dentro de paréntesis** antes de realizar cualquier otra operación. Esto incluye operaciones de suma, resta, multiplicación y división que se encuentren dentro de los paréntesis. Las operaciones dentro de los paréntesis se realizan de izquierda a derecha siguiendo las reglas normales de prioridad de operaciones.

   Consideremos la siguiente expresión:

$$2 * (3 + 4)$$

   De acuerdo con la primera regla de prioridad, primero debemos resolver la operación dentro de los paréntesis: 3 + 4 = 7. Luego, multiplicamos el resultado por 2 para obtener 14. Siguiendo esta regla, el resultado es 14.

2. **Segunda prioridad: exponentes.**

   La segunda regla de prioridad en las operaciones con números enteros es **evaluar cualquier operación que involucre exponentes después de resolver las operaciones dentro de los paréntesis.** Los exponentes indican la cantidad de veces que un número debe multiplicarse por sí mismo.

Consideremos la expresión:

2 ^ 3

Según la segunda regla de prioridad, primero evaluamos el exponente. Esto significa que debemos multiplicar 2 por sí mismo tres veces: 2 * 2 * 2 = 8. Por lo tanto, el resultado es 8.

3. **Tercera prioridad: multiplicación y división.**

   La tercera regla de prioridad se refiere a las operaciones de multiplicación y división. Cuando una expresión contiene multiplicación o división, **estas operaciones se realizan antes que las de suma y resta.** Si hay varias operaciones de multiplicación o división, se resuelven de izquierda a derecha.

   Consideremos la expresión:

   6 / 3 ∗ 4

   De acuerdo con la tercera regla de prioridad, primero realizamos la división: 6 / 3 = 2. Luego, multiplicamos el resultado por 4: 2 * 4 = 8. Por lo tanto, el resultado es 8.

4. **Cuarta prioridad: suma y resta.**

   La cuarta y última regla de prioridad se refiere a las operaciones de suma y resta. Cuando una expresión contiene estas operaciones, **se resuelven después de realizar las operaciones de multiplicación y división.** Al igual que con la multiplicación y la división, si hay varias operaciones de suma o resta, se resuelven de izquierda a derecha.

   Consideremos la expresión:

   5 – 2 + 3

De acuerdo con la cuarta regla de prioridad, **primero realizamos la resta:** 5 - 2 = 3. Luego, sumamos el resultado con 3: 3 + 3 = 6. Por lo tanto, el resultado es 6.

5. **Quinta prioridad: agrupación de paréntesis externos.**

   En algunos casos, una expresión puede contener **paréntesis externos que no están relacionados con operaciones matemáticas**, sino que se utilizan para **indicar cierta estructura o notación.** Estos paréntesis externos deben respetarse antes de aplicar las reglas de prioridad de las operaciones. En otras palabras, cualquier operación dentro de los paréntesis externos se considera de primera prioridad.

Consideremos la expresión:

$$(5 - 2) * 3$$

A pesar de que la multiplicación tiene una prioridad más alta que la resta, debemos resolver primero la operación dentro de los paréntesis externos: 5 - 2 = 3. Luego, multiplicamos el resultado por 3: 3 * 3 = 9. Por lo tanto, el resultado es 9.

6. **Sexta prioridad: reglas combinadas.**

Cuando una expresión contiene varias operaciones diferentes, **debemos aplicar las reglas de prioridad en el orden mencionado anteriormente**, respetando los paréntesis externos cuando estén presentes. Veamos un ejemplo que combina todas estas reglas:

Consideremos la expresión:

$$2 * (3 + 4) - 5\char`^2 / (2 + 3)$$

Primero se resuelven las operaciones dentro de los paréntesis: 3 + 4 = 7

Luego evaluamos el exponente: 5^2 = 25

Ahora, aplicamos las operaciones de multiplicación y división: 2 * 7 = 14

25 / (2 + 3) = 25 / 5 = 5

Finalmente, realizamos la resta: 14 - 5 = 9

Siguiendo las reglas de prioridad en orden, el resultado de la expresión es 9.

7. **Séptima prioridad: uso de paréntesis para cambiar la propiedad.**

En ocasiones, se pueden utilizar paréntesis para **alterar el orden de las operaciones y forzar que ciertas operaciones se realicen antes.**

Consideremos la siguiente expresión:

$$(3 + 2) * 4$$

A pesar de que la multiplicación generalmente tiene prioridad sobre la suma, los paréntesis alteran la prioridad. Primero, resolvemos la operación dentro de los paréntesis: 3 + 2 = 5

Luego, multiplicamos el resultado por 4: 5 * 4 = 20

Los paréntesis se utilizan aquí para enfatizar que la suma debe realizarse antes de la multiplicación.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Recuerda

Las reglas de prioridad de las operaciones con números enteros son fundamentales para determinar el orden en el cual debemos realizar las operaciones matemáticas en una expresión. Siguiendo estas reglas en el orden correcto, podemos evitar ambigüedades y garantizar que todos obtengan el mismo resultado al resolver una expresión matemática. Estas reglas son esenciales para simplificar expresiones complejas y para realizar cálculos precisos.

Ideas clave

- Los números naturales son esenciales en las matemáticas y la vida cotidiana, ya que reflejan cantidades enteras positivas. Nos permiten contar elementos en conjuntos y establecer un orden lógico en diversas situaciones, desde contar manzanas en una caja hasta clasificar a los estudiantes por su edad.

- Los números naturales forman un conjunto infinito que comienza en 1 y continúa indefinidamente: {1, 2, 3, 4, ...}. Esta característica de infinitud es única en los números naturales, ya que no tienen un límite superior. Esto hace que sean una herramienta versátil para representar la cantidad en una amplia gama de contextos.

- En aritmética, los números naturales desempeñan un papel crucial. Se utilizan para realizar operaciones matemáticas fundamentales, como la suma, la resta, la multiplicación y la división. Estas operaciones son la base para resolver problemas en la vida diaria y en disciplinas más avanzadas de las matemáticas.

- Los números naturales también forman la base del sistema de numeración decimal, que es ampliamente utilizado en todo el mundo. En este sistema, cada dígito (0 al 9) representa una potencia de diez, lo que permite expresar números grandes y complejos de manera eficiente.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Esto es esencial para actividades como llevar un registro financiero, medir distancias o calcular tiempos.

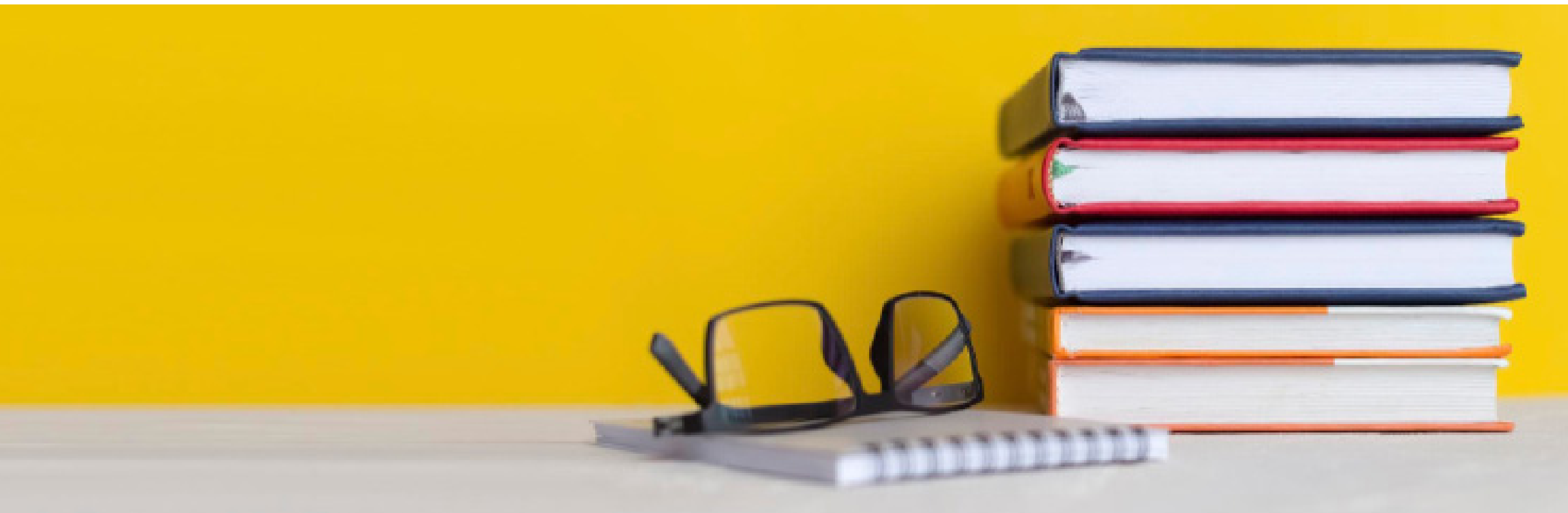
- Los números naturales sirven como punto de partida para explorar conceptos matemáticos más avanzados. La teoría de números, por ejemplo, se centra en propiedades únicas de los números naturales, como los números primos y los números compuestos. Estos conceptos son esenciales en la criptografía, la factorización de números y la resolución de ecuaciones con enteros, desempeñando un papel crucial en la seguridad cibernética y la informática avanzada.

Glosario

- **Descomposición:** La descomposición se refiere al proceso de desglosar un número en sus factores primos o en sus componentes más simples.
- **Divisores:** Los divisores son números que pueden dividir otro número exactamente sin dejar un residuo.
- **Inverso:** El inverso de un número es aquel número que, cuando se multiplica por el original, produce un resultado igual a la identidad multiplicativa.
- **Posición relativa:** La posición relativa se refiere a la relación espacial o numérica entre dos números o elementos.
- **Simetría:** La simetría en los números se refiere a la propiedad de ciertas figuras o patrones numéricos que son idénticos o se reflejan en relación con un eje o punto.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Referencias bibliográficas



- Cañellas, A., Porras, M., Iturbe, A. (2013). *Enseñanza de los números naturales en el nivel inicial.* Editorial Novedades Educativas.
- Huete, M. (1983). *El conjunto de los números enteros.* EUNED, Universidad Estatal a Distancia.
- Ibáñez, R. (2022). *La gran familia de los números.* Ed. Catarata.
- Marín, M. (2006). *Aproximación a los números irracionales.* Sello Editorial.
- Núñez, R. (2007). *Números racionales e introducción de los números irracionales.* Publicatuslibros.com

Enlaces web de interés

- Conceptos básicos de los números racionales.
- Definición e historia de los números racionales.
- Números racionales con ejemplos.
- Números racionales y propiedades.
- El conjunto de los números.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU

MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

Castilla-La Mancha