Competencia matemática
Competencias clave

Nivel 3

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

Castilla-La Mancha

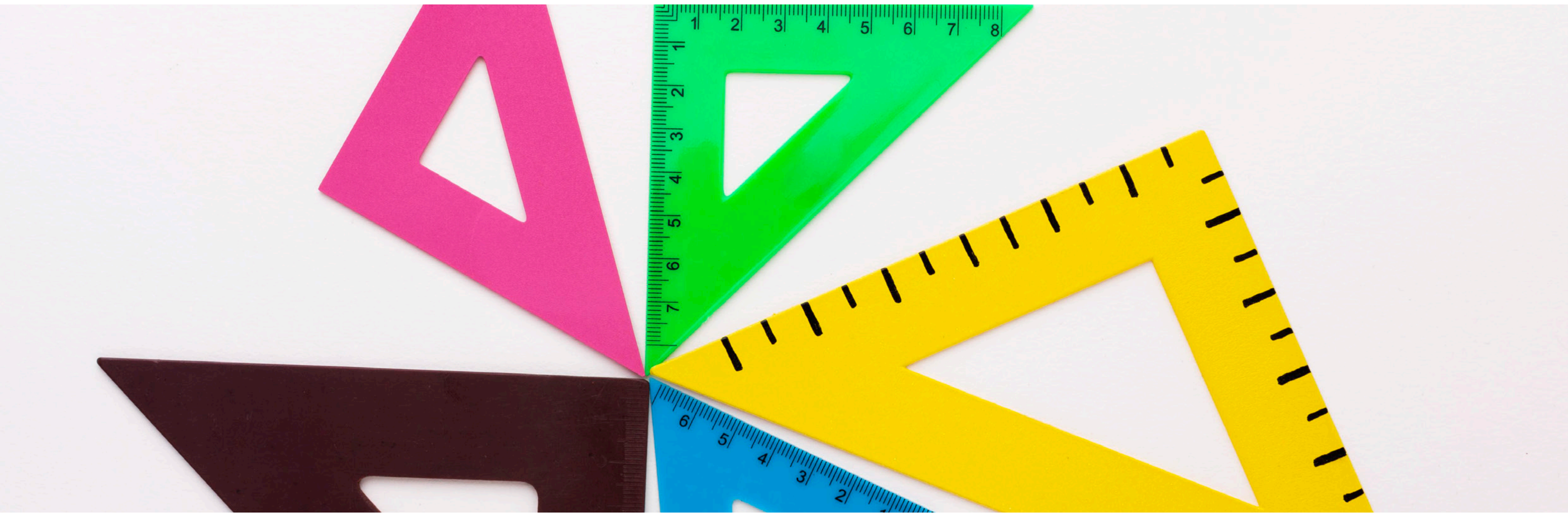
Índice de contenidos

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

BLOQUE II: UTILIZACIÓN DE LAS MEDIDAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

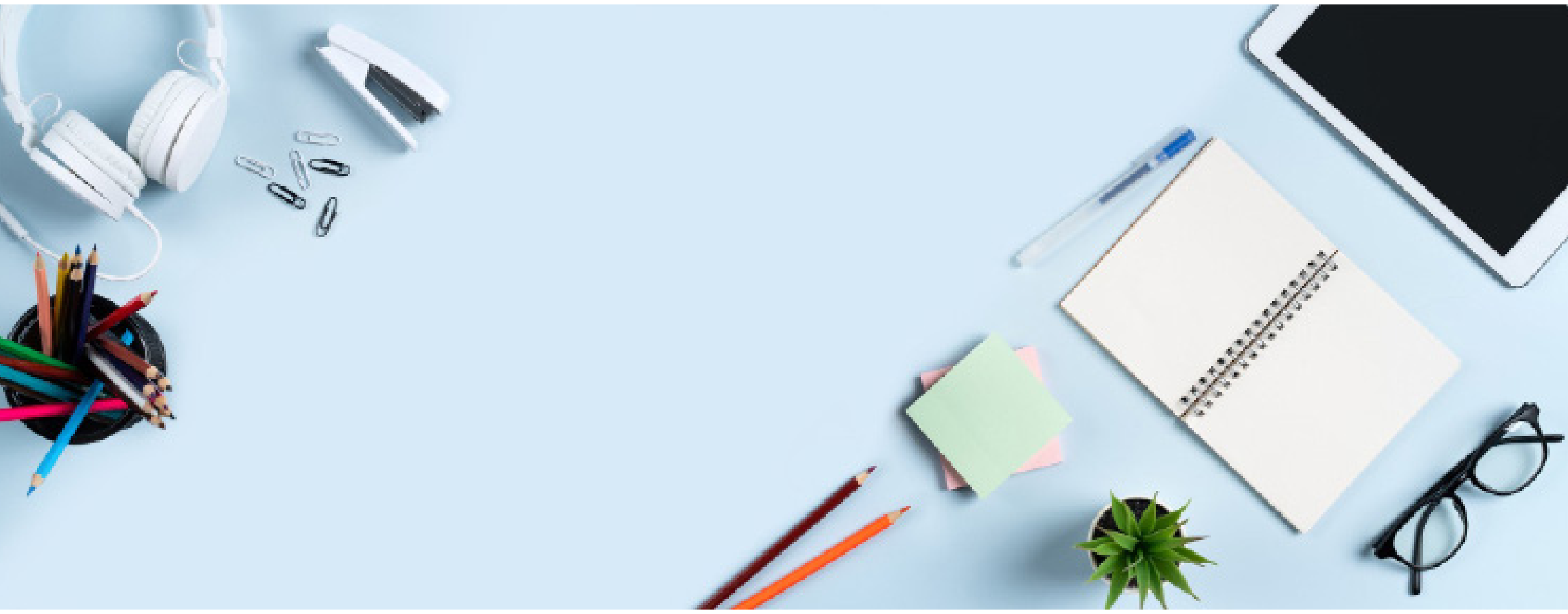
Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

UD6.1: ÁNGULOS.



Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Presentación



Los ángulos son elementos geométricos que desempeñan un papel clave en la comprensión de la forma y la estructura de nuestro entorno. Desde la arquitectura hasta la navegación, los ángulos son omnipresentes y esenciales para diversas aplicaciones en la vida cotidiana y la ciencia.

En esta unidad didáctica, analizaremos en detalle los ángulos y sus aplicaciones. Conoceremos los tipos de ángulos, como los agudos, obtusos y rectos, y entenderemos cómo medirlos en grados. Repasaremos las operaciones básicas, como la suma y resta de ángulos. Este conocimiento no solo fortalecerá nuestra base matemática, sino que también nos permitirá resolver problemas cotidianos y abordar desafíos más complejos en matemáticas y ciencias.

Después de este recorrido, dominarás el trabajo con ángulos. Conocerás la diferencia entre ángulos agudos, obtusos y rectos, y podrás medirlos con precisión en grados. Dominarás las operaciones básicas con ángulos, lo que te permitirá calcular medidas de ángulos compuestos en diversas figuras geométricas. Y, por último, también serás capaz de aplicar las propiedades de los ángulos en situaciones diversas.

Objetivos

- Reconocer y diferenciar entre estos tipos de ángulos en figuras geométricas diversas, desarrollando una comprensión precisa de sus características.
- Establecer una base sólida en la comprensión de cómo se miden los ángulos en grados y su importancia en matemáticas y geometría.
- Adquirir la capacidad de determinar con precisión la medida en grados de un ángulo en función de su apertura y posición en una figura.
- Dominar la capacidad de sumar, restar, multiplicar o dividir ángulos para determinar medidas de ángulos en diferentes situaciones, lo que implica una comprensión profunda de las operaciones básicas.
- Dominar la conversión de medidas angulares entre grados y radianes, facilitando cálculos en diferentes problemas y ámbitos.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

1. ÁNGULOS.

1.1. MEDIDAS DE ÁNGULOS.

Los **ángulos** son una medida fundamental en **geometría y matemáticas** que nos ayudan a comprender la relación espacial entre dos **líneas o segmentos** en un plano. Estos conceptos son esenciales en la resolución de **problemas geométricos y trigonométricos.**

Para comprender los ángulos de manera más profunda, es importante comenzar por definir algunos **términos clave:**

- **Punto:** Un punto es la **entidad más básica** en geometría y no tiene dimensión. Se representa con una **marca o una letra mayúscula**, como A o B.
- **Línea:** Una línea es una **sucesión infinita de puntos** en una sola dirección. No tiene ancho ni grosor, y se puede representar con **una flecha** que se extiende en ambas direcciones, como AB.
- **Segmento de línea:** Un segmento de línea es una **parte finita de una línea** que consta de dos puntos finales. Se denota como AB.
- **Rayo:** Un rayo es una **parte infinita de una línea** que se extiende desde un punto de origen en una dirección específica. Se representa con un punto de origen y una flecha en una sola dirección, como A→.
- **Plano:** Un plano es una **superficie bidimensional que se extiende infinitamente** en todas las direcciones. Puedes imaginarlo como una hoja de papel infinitamente grande.

Un ángulo es la medida de la **separación entre dos rayos** que comparten un punto de origen común. Este punto de origen se llama el **vértice del ángulo**, y los dos rayos se llaman **lados del ángulo.** Los lados del ángulo se extienden desde el vértice en diferentes direcciones.

Para denotar un ángulo, se utiliza una **notación específica**. El vértice se coloca en el centro, y los lados del ángulo se representan como líneas que se extienden desde el vértice, formando una "V".

La **notación común** para un ángulo es **∠ABC**, donde A, B y C son letras que representan puntos o vértices. El vértice del ángulo se coloca en el medio (B en este caso), y los lados del ángulo son BA y BC.

La medición de ángulos en **grados sexagesimales** es un sistema ampliamente utilizado que nos permite cuantificar la separación angular entre dos líneas o rayos que se originan en un punto común, llamado vértice del ángulo. Este sistema se basa en la idea de que un **círculo completo** se divide en **360 partes iguales**, y, cada una de estas partes, se denomina un **grado sexagesimal.**

Los grados sexagesimales son **una unidad angular** ampliamente aceptada y se utilizan en una variedad de campos, desde la trigonometría hasta la topografía.

Un grado sexagesimal es la **unidad básica de medida** angular en este sistema. Se denota con el símbolo **"°"**. Un círculo completo se divide en 360 grados sexagesimales. La idea de dividir un círculo en 360 grados se remonta a la antigua Babilonia y ha sido ampliamente adoptada en todo el mundo.

Cada grado se divide en **60 partes** más pequeñas llamadas **minutos sexagesimales.** Los minutos se denotan con el símbolo "'". Por lo tanto, hay 60 minutos en un grado.

Cada minuto se subdivide, aún más, en **60 partes más pequeñas** llamadas **segundos sexagesimales.** Los segundos se denotan con el símbolo "". En resumen, hay 60 segundos en un minuto y, por lo tanto, 3,600 segundos en un grado.

Recuerda

Los ángulos son una medida fundamental en geometría y matemáticas que nos ayudan a comprender la relación espacial entre dos líneas o segmentos en un plano.

La medición de ángulos en grados sexagesimales se puede realizar utilizando diversas herramientas y métodos. A continuación, se explican los pasos básicos para medir un ángulo con precisión utilizando un **transportador**, una herramienta comúnmente utilizada en geometría y trigonometría.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Un transportador es una herramienta diseñada específicamente para medir ángulos. Se compone de un semicírculo o un círculo completo marcado con divisiones angulares que representan grados sexagesimales. La **escala** puede ser de 0 a 180 grados o de 0 a 360 grados, según el diseño del transportador.

Aquí se describen los pasos para medir un ángulo utilizando un transportador:

- **Paso 1: Ubicación del vértice del ángulo.**

  Coloca el vértice del ángulo en el punto central del transportador. Asegúrate de que el vértice quede exactamente en el punto central para obtener una medida precisa.

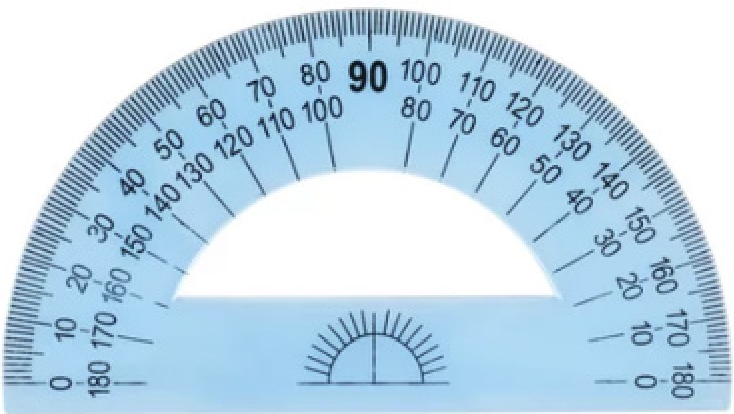
- **Paso 2: Alinea un lado del ángulo.**

  Alinea uno de los lados del ángulo con la línea base del transportador. La línea base es la línea recta que atraviesa el centro del transportador.

- **Paso 3: Lectura del ángulo.**

  Lee la medida del ángulo directamente en la escala del transportador. El número de grados sexagesimales que lees es la medida del ángulo. Si el transportador tiene una escala de minutos o segundos, también puedes utilizarla para medir ángulos más precisos.

En la siguiente imagen se muestra un ejemplo de un trasportador de ángulos:



Trasportador de ángulos.

Para comprender mejor cómo medir ángulos en grados sexagesimales, consideremos algunos **ejemplos prácticos:**

Imagina que deseas medir un ángulo recto, que es un ángulo de 90 grados.

Sigue estos pasos con un transportador:

- Coloca el vértice del ángulo en el centro del transportador.
- Alinea uno de los lados del ángulo con la línea base del transportador.
- Lee la medida en la escala del transportador, que debe ser 90 grados.

Supongamos que deseas medir un ángulo agudo de 30 grados. Utiliza el transportador de la siguiente manera:

- Coloca el vértice del ángulo en el centro del transportador.
- Alinea uno de los lados del ángulo con la línea base del transportador.
- Lee la medida en la escala del transportador, que debe ser 30 grados.

Si quieres medir un ángulo obtuso de 120 grados, sigue estos pasos:

- Coloca el vértice del ángulo en el centro del transportador.
- Alinea uno de los lados del ángulo con la línea base del transportador.
- Lee la medida en la escala del transportador, que debe ser 120 grados.

A veces, es necesario trabajar con medidas angulares más precisas que los grados. Para ello, es útil comprender cómo convertir entre grados, minutos y segundos. A continuación, se describen las conversiones básicas:

- Para **convertir minutos a grados**, divide el número de minutos entre 60.
- Para **convertir segundos a grados**, divide el número de segundos entre 3.600 (ya que hay 60 segundos en un minuto y 60 minutos en un grado).

  Por ejemplo, si tienes 45 minutos y 30 segundos, y deseas convertirlos a grados, primero, convierte los minutos: 45 minutos = 60/45 grados=0,75 grados.

  Luego, convierte los segundos: 30 segundos= 3600/30 grados=0,00833 grados.

  Finalmente, suma las conversiones: 0,75 grados+0,00833 grados=0,75833 grados.

- Para **convertir grados a minutos**, multiplica el número de grados por 60.
- Para **convertir grados a segundos**, multiplica el número de grados por 3,600.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Por ejemplo, si tienes 2,5 grados, y deseas convertirlos a minutos y segundos, primero, convierte los minutos: 2,5 grados×60 minutos/grado=150 minutos.

Luego, convierte los segundos: 2,5 grados×3600 segundos/grado=9.000 segundos.

Recuerda

Un transportador es una herramienta diseñada específicamente para medir ángulos. Se compone de un semicírculo o un círculo completo marcado con divisiones angulares que representan grados sexagesimales.

Otra forma de medir los ángulos es en **radianes**. Un radián (abreviado como **"rad"**) es una medida de ángulo que se basa en las dimensiones de un círculo. Más específicamente, un radián es el **ángulo subtendido por un arco** que tiene la misma longitud que el radio de un círculo. Esto significa que, en un círculo completo, **hay 2π radianes**, que es, aproximadamente, igual a 6,28318 radianes.

Una relación importante que los estudiantes deben comprender es la **conversión entre grados y radianes**. Un círculo completo tiene 360 grados, que es equivalente a 2π radianes. Por lo tanto, la relación de conversión básica es:

1 grado=π/180 radianes

Esta relación es fundamental para convertir medidas angulares de un sistema a otro.

En la práctica, la medición de ángulos en radianes **no se realiza mediante herramientas físicas** como un transportador, como se hace con los grados sexagesimales. En su lugar, se calcula utilizando **fórmulas y relaciones geométricas**. Aquí se presentan algunos métodos y herramientas para medir ángulos en radianes:

La forma más común de medir un ángulo en radianes es utilizando la fórmula:

Ángulo en radianes= Longitud del arco/Radio del círculo

Esta fórmula se deriva directamente de la definición de radianes. El ángulo en radianes es igual a la longitud del arco dividida por el radio del círculo.

Otra forma de entender los radianes es observar que un círculo completo tiene una longitud de arco igual a 2π veces su radio. Por lo tanto, un círculo completo abarca 2π radianes.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Esto es un punto clave para comprender por qué 2π es un ángulo importante en radianes, ya que representa una circunferencia completa.

Para ilustrar cómo medir ángulos en radianes, consideremos algunos **ejemplos prácticos:**

Un ángulo recto mide 90 grados en el sistema de grados sexagesimales. Para expresarlo en radianes, utilizamos la relación de conversión mencionada anteriormente:

90 grados × π/180 = π/2 radianes

Por lo tanto, un ángulo recto es igual a π/2 radianes.

Supongamos que tenemos un ángulo agudo de 30 grados en el sistema de grados sexagesimales. Para convertirlo a radianes:

30 grados × π/180 = π/6 radianes.

El ángulo agudo es igual a π/6 radianes.

Si tenemos un ángulo obtuso de 120 grados, la conversión a radianes sería:

120 grados × π/180 = 2 xπ/3 radianes.

El ángulo obtuso es igual a

2π/3 radianes.

La medición de ángulos tiene múltiples **aplicaciones:**

- **En la construcción y la arquitectura,** la medición precisa de ángulos es esencial para garantizar que las estructuras sean seguras y cumplan con las especificaciones de diseño. Desde la construcción de viviendas hasta rascacielos, los ángulos son cruciales para garantizar que las estructuras sean estables y estéticamente agradables.
- **En la topografía y la cartografía,** la medición de ángulos se utiliza para mapear la superficie de la Tierra y crear mapas precisos. Los topógrafos y cartógrafos utilizan instrumentos especializados, como teodolitos, para medir ángulos con alta precisión. Esto es fundamental para actividades como la planificación urbana, la navegación y la cartografía geológica.
- **La navegación marítima y aérea** depende de la medición precisa de ángulos para determinar la posición y la dirección. Los navegantes utilizan sextantes para medir ángulos entre objetos celestes, como el sol y las estrellas, y el horizonte para calcular su posición en el mar. Del mismo modo, los pilotos utilizan instrumentos de navegación para medir ángulos y seguir rutas aéreas con precisión.

- **En astronomía,** la medición de ángulos es fundamental para determinar la posición de objetos celestes en el cielo. Los astrónomos utilizan telescopios e instrumentos de medición de ángulos para calcular las coordenadas celestes de estrellas, planetas y otros objetos del espacio.
- **En ingeniería mecánica,** la medición de ángulos es esencial para el diseño y la fabricación de máquinas y componentes mecánicos. La alineación precisa de piezas y componentes, así como la medición de ángulos de rotación en motores y mecanismos, son fundamentales para garantizar el funcionamiento adecuado de equipos y maquinaria.

1.2. CLASES DE ÁNGULOS.

Los ángulos se pueden clasificar de diferentes formas. Según su medida, encontramos los siguientes:

Agudos.

Rectos.

Obtusos.

Llanos.

Completos.

Perigónicos.

Tipos de ángulos según su forma.

- **Ángulos agudos:** Un ángulo agudo es un ángulo que mide **menos de 90 grados.** Esto significa que la abertura entre los dos lados del ángulo es relativamente pequeña. Visualmente, un ángulo agudo parece estar **"estrecho" o "agudo".** La propiedad fundamental de los ángulos agudos es que son siempre **más pequeños que un ángulo recto.**

  Utilizar **diagramas y gráficos** es una forma efectiva de ilustrar ángulos agudos. Puedes mostrar dos líneas que se cruzan en un punto y etiquetar los ángulos correspondientes.

Resalta la abertura relativamente pequeña de los ángulos agudos en comparación con otros tipos de ángulos.

Un ángulo agudo es siempre más pequeño que un ángulo recto, que mide exactamente 90 grados. Esta relación es esencial en la clasificación y comparación de ángulos en diversas situaciones.

Los ángulos agudos tienen diferentes **propiedades:**

- Son siempre positivos y mayores que cero.
- La suma de dos ángulos agudos siempre es menor que 180 grados, lo que significa que no pueden formar un ángulo llano o un ángulo obtuso.

Los ángulos agudos tienen **diferentes aplicaciones:**

- **En arquitectura y construcción,** los ángulos agudos se utilizan para diseñar estructuras estables y seguras. La comprensión de los ángulos es crucial para determinar la inclinación de techos, escaleras y otros componentes arquitectónicos.
- **En el diseño de paisajes y en la planificación del medio ambiente,** los ángulos agudos juegan un papel importante en la distribución de elementos como árboles, arbustos y senderos. La ubicación y la orientación de estos elementos, a menudo, se determinan mediante la consideración de ángulos agudos.

• **Ángulos rectos:** Un ángulo recto es un tipo especial de ángulo que **mide exactamente 90 grados**. Esto significa que la abertura entre los dos lados del ángulo es precisa y f**orma una "L" perfecta**. La propiedad fundamental de los ángulos rectos es que son siempre **iguales a 90 grados.**

Los ángulos rectos tienen varias **propiedades clave** que los hacen fundamentales en la geometría y otras disciplinas:

- Si la suma de dos ángulos es igual a 90 grados, se dice que son **complementarios**. Esto significa que los dos ángulos **pueden combinarse** para formar un ángulo recto.
- Los ángulos rectos se encuentran comúnmente en **formas geométricas,** como cuadrados y rectángulos, donde forman esquinas perfectamente perpendiculares.
- **La bisectriz** de un ángulo recto crea dos ángulos agudos, cada uno de **45 grados.**

Los ángulos rectos tienen diferentes **aplicaciones:**

- **Los carpinteros y artesanos** utilizan ángulos rectos para construir muebles y estructuras de madera. La precisión en la medición de ángulos rectos es crucial para asegurar que las piezas se ensamblen correctamente.

- Los ángulos rectos son fundamentales en la **geometría y las matemáticas** en general. Se utilizan para calcular áreas, resolver ecuaciones y establecer relaciones entre ángulos en formas geométricas.
- **En arquitectura y construcción,** los ángulos rectos son fundamentales para diseñar y construir edificios, estructuras y sistemas. Los cimientos de edificios, las esquinas de las habitaciones y las uniones de paredes y techos son ejemplos de aplicaciones de ángulos rectos.

- **Ángulos obtusos:** Un ángulo obtuso es un tipo especial de ángulo **que mide más de 90 grados, pero menos de 180 grados.** Esto significa que la abertura entre los dos lados del ángulo es mayor que un ángulo recto (90 grados), pero menor que un ángulo llano (180 grados). Visualmente, un ángulo obtuso **parece estar más "abierto"** que un ángulo recto.

  Los ángulos obtusos tienen **varias propiedades:**

  - Son siempre mayores que 90 grados.
  - La suma de un ángulo obtuso y un ángulo agudo siempre es mayor que 180 grados, lo que significa que no pueden combinarse para formar un ángulo recto.

  Los ángulos obtusos tienen diferentes **aplicaciones:**

  - **La topografía y la geodesia** se basan en la medición precisa de ángulos, incluidos los ángulos obtusos, para cartografiar la superficie de la Tierra, determinar elevaciones y coordenadas geográficas, y medir distancias en terreno montañoso o irregular.
  - **En la navegación terrestre y marítima,** la comprensión de los ángulos obtusos es esencial para determinar la dirección y la ubicación. Los navegantes utilizan herramientas como brújulas y sextantes para medir ángulos y calcular su posición en el mar o en la tierra.
  - **La ingeniería civil y la construcción** requieren la comprensión de los ángulos obtusos para diseñar y construir estructuras, carreteras, puentes y sistemas de drenaje que se adapten a terrenos irregulares y condiciones específicas.

- **Ángulos llanos:** Un ángulo llano es un tipo especial de ángulo que mide exactamente **180 grados.** Esto significa que la abertura entre los dos lados del ángulo es una **línea recta**. Visualmente, un ángulo llano se representa como una línea recta que se extiende sin curvarse, y, a menudo, se lo denomina **"ángulo recto extendido".** La propiedad fundamental de los ángulos llanos es que **miden la mitad de un ángulo completo.**

  Los ángulos llanos tienen varias **propiedades clave:**

  - Miden exactamente 180 grados.

- Son una línea recta, lo que significa que su abertura es una extensión continua y recta de un lado al otro.

Los ángulos llanos tienen **diferentes aplicaciones:**

- **En diseño geométrico y arquitectura,** los ángulos llanos se utilizan para crear estructuras, habitaciones y diseños con líneas rectas y simetría. Los techos, las paredes y los espacios interiores de edificios a menudo involucran ángulos llanos.
- **En el diseño de paisajes y la planificación urbana,** los ángulos llanos pueden estar presentes en la disposición de calles, edificios y elementos naturales. La simetría y la alineación, a menudo, se logran mediante el uso de ángulos llanos.
- **En la fotografía y el arte,** los ángulos llanos son esenciales para la composición de imágenes y obras visuales. La alineación de elementos y la perspectiva, a menudo, se basan en ángulos llanos.

- **Ángulos completos:** Un ángulo completo es un tipo especial de ángulo que mide exactamente **360 grados**. Esto significa que la abertura entre los dos lados del ángulo forma un **círculo completo**. Visualmente, un ángulo completo es una vuelta completa alrededor de un punto, y se representa **como un círculo o una elipse con un ángulo de 360 grados.**

Los ángulos completos tienen varias **propiedades clave** que los distinguen:

- Miden exactamente 360 grados, lo que es equivalente a un círculo completo.
- Pueden descomponerse en ángulos más pequeños, y la suma de estos ángulos más pequeños también será igual a 360 grados.

Los ángulos completos tienen **diferentes aplicaciones:**

- **En navegación y orientación,** un ángulo completo es crucial para representar una dirección que abarca una vuelta completa alrededor de un punto de referencia. Los navegantes utilizan esta idea para determinar rumbos y direcciones en la navegación terrestre y marítima.
- **En la astronomía y la astrofísica,** los ángulos completos se utilizan para medir la posición y el movimiento de objetos celestes, así como para calcular la longitud de los días y las noches en diferentes épocas del año.
- **En programación y gráficos por computadora,** los ángulos completos se utilizan para controlar la rotación y orientación de objetos 3D, como modelos tridimensionales y personajes virtuales en videojuegos y aplicaciones de diseño.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

- **Ángulos perigónicos:** La palabra "perigónico" se deriva del prefijo "peri", que significa "alrededor", y de "gonía", que se refiere a "ángulo". Un ángulo perigónico se define como un ángulo que **abarca una rotación completa alrededor de un punto o eje específico.** En otras palabras, un ángulo perigónico es igual a **360 grados**, o lo que es lo mismo, a una vuelta completa alrededor de un círculo.

Según su posición, los ángulos se pueden clasificar como:

- **Ángulos adyacentes.**
- **Ángulos opuestos por el vértice.**
- **Ángulos verticales.**

Ángulos según su posición.

- **Ángulos adyacentes:** Los ángulos adyacentes son dos ángulos que **comparten un lado común y un vértice común**, pero no comparten ningún otro lado. En otras palabras, los ángulos adyacentes están uno al lado del otro y **comparten una frontera común.** Este lado común es también conocido como el **"lado inicial"** de ambos ángulos. La propiedad de tener un vértice y un lado en común es lo que define a los ángulos adyacentes.

  Los ángulos adyacentes tienen varias **características y propiedades:**

  - La característica definitoria de los ángulos adyacentes es que **comparten un vértice común y un lado común.** Esto significa que los dos ángulos se tocan en un punto y comparten una frontera.
  - Aunque los ángulos adyacentes comparten un lado común, **no comparten los lados internos.** Cada ángulo tiene su propio lado interno, que es exclusivo de ese ángulo.
  - Los ángulos adyacentes **no se superponen ni se cruzan entre sí.** Cada uno ocupa un espacio distinto en relación con el lado común.

- **Ángulos opuestos por el vértice:** Los ángulos opuestos por el vértice son dos ángulos que se forman **cuando dos líneas se cruzan.** Estos ángulos están **en lados opuestos de la intersección y comparten el vértice común.** La característica distintiva de los ángulos opuestos por el vértice es que **son iguales en medida.** Esto significa que el ángulo formado en un lado de la intersección es igual al ángulo formado en el lado opuesto de la intersección.

Entre sus **propiedades principales** destacan:

- La característica más importante de los ángulos opuestos por el vértice es que son **iguales en medida.** Esto significa que el ángulo A, formado en un lado de la intersección, tiene la misma medida que el ángulo B, formado en el lado opuesto de la intersección.
- Los ángulos opuestos por el vértice **comparten un vértice común**, que es el punto donde se cruzan las dos líneas. Este vértice común es esencial para la definición de estos ángulos y es lo que les da su nombre.
- Los lados de los ángulos opuestos por el vértice **son lados opuestos en la intersección de las líneas.** El lado de un ángulo se encuentra en el lado de la intersección en el que se formó, y el lado del otro ángulo se encuentra en el lado opuesto de la intersección.

- **Ángulos verticales:** Los ángulos verticales son **pares de ángulos** que se forman cuando **dos líneas se cruzan.** Estos ángulos tienen la característica distintiva de ser iguales en medida, **independientemente de su ubicación** en la intersección. En otras palabras, si dos líneas se cruzan, los ángulos opuestos entre sí son iguales en medida y se consideran ángulos verticales.

Entre sus **propiedades principales** destacan:

- La característica más importante de los ángulos verticales es que son iguales en medida. Esto significa que el ángulo A, formado en un lado de la intersección, tiene la misma medida que el ángulo B, formado en el lado opuesto de la intersección.
- Los ángulos verticales se encuentran en lados opuestos de la intersección de las líneas. Esto significa que el ángulo A se encuentra en un lado de la intersección; mientras que el ángulo B se encuentra en el lado opuesto.

Según su relación, los ángulos se pueden clasificar como:

Ángulos complementarios.

Ángulos suplementarios.

Ángulos correspondientes.

Ángulos alternos internos y externos.

Ángulos según su relación.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

- **Ángulos complementarios:** Los ángulos complementarios son dos ángulos cuyas medidas **suman 90 grados.** En otras palabras, si tienes dos ángulos, A y B, y la medida del ángulo A se suma a la medida del ángulo B, el resultado será siempre igual a 90 grados. Matemáticamente, esto se expresa como:

  A + B = 90 grados

  Entre sus **características y propiedades** destacan:

  - La característica más importante de los ángulos complementarios es que la suma de sus medidas **siempre es igual a 90 grados.** Esto significa que, si conoces la medida de un ángulo complementario, puedes calcular la medida del otro ángulo restando la medida conocida de 90 grados.
  - Los ángulos complementarios también **se relacionan con otros ángulos en geometría.** Por ejemplo, si tienes un ángulo agudo que mide menos de 90 grados, su complemento será un ángulo agudo diferente que sumará 90 grados con el ángulo original.

- **Ángulos suplementarios:** Los ángulos suplementarios son dos ángulos **cuyas medidas suman 180 grados.** En otras palabras, si tienes dos ángulos, A y B, y la medida del ángulo A se suma a la medida del ángulo B, el resultado será siempre igual a 180 grados. Matemáticamente, esto se expresa como:

  A + B = 180 grados

  Sus **características principales** son:

  - La característica más importante de los ángulos suplementarios es que la suma de sus medidas siempre **es igual a 180 grados.** Esto significa que si conoces la medida de un ángulo suplementario, puedes calcular la medida del otro ángulo restando la medida conocida de 180 grados.
  - Los ángulos suplementarios también se relacionan **con otros ángulos en geometría.** Por ejemplo, si tienes un ángulo agudo que mide menos de 90 grados, su suplemento será un ángulo obtuso diferente que sumará 180 grados con el ángulo original.

- **Ángulos correspondientes:** Los ángulos correspondientes son **pares de ángulos** que se forman cuando una **línea recta (conocida como transversal) corta dos líneas paralelas.** Cuando esto ocurre, los ángulos correspondientes se encuentran en la **misma posición relativa** en relación con la transversal. Matemáticamente, si A y B son ángulos correspondientes, se cumple la siguiente relación:

  A = B

Entre las **características principales** de los ángulos correspondientes destacan:

- La característica más importante de los ángulos correspondientes es que **son iguales en medida.** Esto significa que si tienes dos ángulos correspondientes A y B en una figura con líneas paralelas cortadas por una transversal, entonces A = B.
- Los ángulos correspondientes se encuentran en **lados opuestos de la transversal** en relación con las líneas paralelas. Esto significa que si tienes una transversal que corta dos líneas paralelas, un ángulo correspondiente estará en un lado de la transversal, mientras que el otro estará en el lado opuesto.

- **Ángulos alternos internos y externos:** Los ángulos alternos internos se encuentran en el **interior de dos líneas paralelas cortadas por una transversal** y son **iguales en medida.** Los **ángulos alternos externos** se encuentran en el exterior de las líneas paralelas y también son iguales en medida.

  Los ángulos alternos internos y externos se forman cuando **una transversal corta dos líneas paralelas.** Esto significa que, para que existan ángulos alternos internos y externos, debe haber líneas paralelas en el plano.

Importante

Existen diferentes formas de clasificar nuestros ángulos. Así, según su forma son agudos, rectos, obtusos, llanos, completos y perigónicos; según su posición son adyacentes, opuestos por el vértice y verticales; y según su relación son complementarios, suplementarios, correspondientes y alternos internos y externos.

1.3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE ÁNGULOS.

Al igual que con otros muchos elementos matemáticos, con los ángulos podemos realizar diferentes operaciones:

- **Suma:** La suma de ángulos es una operación que implica la **adición de dos o más ángulos** para encontrar la medida total del ángulo resultante. Esto se puede aplicar tanto a ángulos en **grados como en radianes.**

  Supongamos que tenemos dos ángulos, A y B, y queremos encontrar la suma de estos ángulos:

  Suma = Ángulo A + Ángulo B

Por ejemplo, si tenemos un ángulo A de 45 grados y un ángulo B de 30 grados, la suma de estos ángulos sería: 45 grados + 30 grados = 75 grados.

En este caso, la suma de los ángulos A y B es de 75 grados.

- **Resta:** La resta de ángulos es una operación que implica la **sustracción de un ángulo de otro** para encontrar la diferencia entre ellos. Al igual que la suma, la resta de ángulos se puede realizar tanto en **grados como en radianes.**

  Supongamos que tenemos dos ángulos, X y Y, y queremos encontrar la diferencia entre ellos:

  Diferencia = Ángulo X – Ángulo Y

  Por ejemplo, si tenemos un ángulo X de 120 grados y un ángulo Y de 45 grados, la diferencia entre estos ángulos sería: 120 grados - 45 grados = 75 grados

  En este caso, la diferencia entre los ángulos X y Y es de 75 grados.

- **Multiplicación:** La multiplicación de ángulos implica la **multiplicación de dos o más ángulos** para encontrar el producto. Esta operación es menos común que la suma y la resta de ángulos, pero puede ser útil en situaciones específicas.

  Supongamos que tenemos dos ángulos, P y Q, y queremos encontrar el producto de estos ángulos:

  Producto = Ángulo P × Ángulo Q

  Por ejemplo, si tenemos un ángulo P de 60 grados y un ángulo Q de 2 grados, el producto de estos ángulos sería: 60 grados × 2 grados = 120 grados.

  En este caso, el producto de los ángulos P y Q es de 120 grados.

- **División:** La división de ángulos implica la **división de un ángulo por otro** para encontrar el cociente. Al igual que la multiplicación de ángulos, esta operación es menos común, pero, aún, tiene su aplicación en ciertas situaciones.

  Supongamos que tenemos dos ángulos, M y N, y queremos encontrar el cociente entre ellos:

  Cociente = Ángulo M / Ángulo N

  Por ejemplo, si tenemos un ángulo M de 180 grados y un ángulo N de 6 grados, el cociente entre estos ángulos sería: 180 grados / 6 grados = 30.

  En este caso, el cociente entre los ángulos M y N es igual a 30.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

A continuación, plantearemos diferentes **problemas** relacionados con ángulos:

- Calcule **la suma** de los siguientes ángulos en grados:

  Ángulo A: 45 grados.

  Ángulo B: 120 grados.

  Ángulo C: 75 grados.

  Solución: La suma de ángulos es una operación directa. Simplemente, sumamos los valores de los ángulos dados: 45 grados + 120 grados + 75 grados = 240 grados.

  Por lo tanto, la suma de los tres ángulos es de 240 grados.

- Calcule **la diferencia** entre los siguientes ángulos en grados:

  Ángulo X: 220 grados.

  Ángulo Y: 95 grados.

  Solución: Para restar ángulos, simplemente, restamos el segundo ángulo del primero: Ángulo X - Ángulo Y = 220 grados - 95 grados = 125 grados.

  La diferencia entre los dos ángulos es de 125 grados.

- Calcule **el producto** de los siguientes ángulos en grados:

  Ángulo P: 60 grados.

  Ángulo Q: 2 grados.

  Solución: La multiplicación de ángulos se realiza multiplicando sus medidas: Ángulo P × Ángulo Q = 60 grados × 2 grados = 120 grados.

  Por lo tanto, el producto de los dos ángulos es de 120 grados.

- Calcule **el cociente** de los siguientes ángulos en grados:

  Ángulo M: 180 grados.

  Ángulo N: 6 grados.

  Solución: La división de ángulos implica dividir la medida del primer ángulo por la del segundo: Ángulo M / Ángulo N = 180 grados / 6 grados = 30 grados.

El cociente de los dos ángulos es igual a 30 grados.

- **Convierte** los siguientes ángulos de grados a radianes:

45 grados.

120 grados.

270 grados.

Solución:

Para convertir de grados a radianes, utilizamos la relación π radianes = 180 grados. Entonces:

a. 45 grados = (45/180)π radianes = (1/4)π radianes.
b. 120 grados = (120/180)π radianes = (2/3)π radianes.
c. 270 grados = (270/180)π radianes = (3/2)π radianes.

Por lo tanto, las conversiones son:

a. 45 grados = (1/4)π radianes.
b. 120 grados = (2/3)π radianes.
c. 270 grados = (3/2)π radianes.

- **Convierte** los siguientes ángulos de radianes a grados:

a. π/4 radianes.
b. (3/2)π radianes.
c. 2π radianes.

Solución: Para convertir de radianes a grados, utilizamos la relación 180 grados = π radianes. Entonces:

a. π/4 radianes = (180/π)(π/4) grados = 45 grados.
b. (3/2)π radianes = (180/π)(3/2)π grados = 270 grados.
c. 2π radianes = (180/π)(2π) grados = 360 grados.

Por lo tanto, las conversiones son:

a. π/4 radianes = 45 grados.
b. (3/2)π radianes = 270 grados.
c. 2π radianes = 360 grados.

- Imagina que estás diseñando un parque infantil y necesitas crear un tobogán. Para garantizar la seguridad de los niños, deseas que la inclinación del tobogán forme un ángulo agudo con la superficie. Si la medida de este ángulo agudo es de 60 grados, ¿cuál es la inclinación del tobogán en relación con la superficie?

  Solución:

  - Si el ángulo formado por la inclinación del tobogán y la superficie es de 60 grados, eso significa que el tobogán está inclinado hacia arriba desde la superficie a un ángulo de 60 grados.
  - Esta inclinación ayuda a los niños a deslizarse hacia abajo de manera segura.
  - Es importante asegurarse de que el ángulo sea agudo (menor de 90 grados) para evitar inclinaciones peligrosas.

- Una persona profesional de la topografía está midiendo la pendiente de un terreno. Al nivelar su instrumento, nota que la línea de nivel está en ángulo recto con respecto al suelo. Si el ángulo entre la línea de nivel y el suelo es de 90 grados, ¿qué puede concluir sobre la inclinación del terreno?

  Solución:

  - Cuando la línea de nivel forma un ángulo recto de 90 grados con respecto al suelo, significa que la superficie del terreno es horizontal en ese punto.
  - En otras palabras, no hay pendiente en esa dirección. Esto es crucial para los topógrafos al medir la elevación de terrenos y crear mapas topográficos precisos.

- Una persona dedicada a la ingeniería está diseñando una rampa de acceso para sillas de ruedas en un edificio. Quiere que la rampa sea fácilmente accesible, por lo que desea que la inclinación sea cómoda para los usuarios. Si el ángulo de inclinación de la rampa es de 120 grados, ¿qué puedes decir sobre la comodidad de la rampa?

  Solución:

  - Un ángulo de 120 grados es mayor que 90 grados, lo que lo convierte en un ángulo obtuso.
  - En este contexto, un ángulo obtuso indica una inclinación pronunciada.
  - Una rampa con una inclinación de 120 grados sería muy empinada y poco cómoda para los usuarios, especialmente para aquellos en sillas de ruedas.
  - Para mayor comodidad y accesibilidad, se prefieren ángulos más pequeños.

- En un polígono regular, se selecciona un vértice y se mide el ángulo formado por dos lados adyacentes que se extienden desde ese vértice. Si el ángulo mide 150 grados, ¿cuántos lados tiene el polígono?

  Solución:

  - En un polígono regular, todos los ángulos son iguales.
  - Si un ángulo interior mide 150 grados, eso significa que cada ángulo en el polígono mide 150 grados.
  - Para determinar el número de lados, podemos usar la fórmula: número de lados = 360 grados / medida de un ángulo interior.
  - En este caso, número de lados = 360 grados / 150 grados = 2,4.
  - Dado que el número de lados debe ser un número entero, concluimos que el polígono tiene 3 lados, y es un triángulo.

- Un explorador está utilizando una brújula para navegar en el bosque. Inicialmente, apunta hacia el norte, que se representa como 0 grados en la brújula. Luego, gira para mirar hacia el sur. ¿Cuál es el cambio en la dirección en grados?

  Solución:

  - Inicialmente, el explorador apunta al norte, lo que equivale a 0 grados.
  - Luego, gira y mira hacia el sur, que equivale a 180 grados.
  - El cambio en la dirección en grados es la diferencia entre estas dos posiciones: 180 grados - 0 grados = 180 grados.
  - El explorador ha cambiado su dirección en 180 grados.

- En un taller están reparando una rueda de un automóvil. La rueda se encuentra inicialmente en una posición con una válvula de aire apuntando hacia arriba, que se representa como 0 grados. Cuando termina su reparación, la válvula de aire está apuntando hacia abajo. ¿Cuál es la medida del ángulo de giro de la rueda?

  Solución:

  - La rueda ha girado desde la posición inicial (0 grados) hasta la posición final (180 grados).
  - El ángulo de giro de la rueda es de 180 grados.
  - Esto representa una media vuelta completa.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

- Un grupo de ciclistas está dando vueltas en una pista de carreras. Inicialmente, apunta hacia el norte, que se representa como 0 grados. Cuando completa una vuelta, regresa a la misma dirección, es decir, hacia el norte. ¿Cuál es el cambio en la dirección en grados?

  Solución:

  - Inicialmente, el grupo de ciclistas apunta al norte, lo que equivale a 0 grados.
  - Cuando completan una vuelta y regresan a la misma dirección (hacia el norte), han girado 360 grados.
  - El cambio en la dirección en grados es de 360 grados. El grupo de ciclistas ha dado una vuelta completa en la pista de carreras.

- Una persona dedicada a la cerrajería está instalando una compuerta giratoria en una cerca. La compuerta se encuentra en una posición con la cerradura hacia arriba, que se representa como 0 grados. Cuando se abre completamente, la cerradura vuelve a estar hacia arriba. ¿Cuál es el cambio en la dirección en grados cuando la compuerta se abre completamente?

  Solución:

  - Inicialmente, la compuerta se encuentra con la cerradura hacia arriba, que equivale a 0 grados.
  - Cuando se abre completamente, y la cerradura vuelve a estar hacia arriba, ha girado 360 grados.
  - El cambio en la dirección en grados es de 360 grados.
  - La compuerta ha realizado una vuelta completa.

- Una persona está navegando en su barco y desea dar un giro completo para cambiar su dirección. Inicialmente, el barco apunta hacia el norte, que se representa como 0 grados. Cuando completa el giro, vuelve a apuntar hacia el norte. ¿Cuál es el cambio en la dirección en grados?

  Solución:

  - Inicialmente, el barco apunta al norte, que equivale a 0 grados. Cuando completa el giro y vuelve a apuntar hacia el norte, ha girado un ángulo de 360 grados.
  - El cambio en la dirección en grados es de 360 grados.
  - El barco ha realizado un giro completo de 360 grados.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

- Una rueda de Ferris gigante está girando en un parque de diversiones. Inicialmente, una persona pasajera se encuentra en la parte más baja de la rueda. Cuando la rueda completa un giro, la persona pasajera vuelve a estar en la parte más baja. ¿Cuál es el cambio en la dirección en grados del pasajero?

  Solución:

  - Inicialmente, la persona pasajera se encuentra en la parte más baja de la rueda, lo que equivale a 0 grados.
  - Cuando la rueda completa un giro y la persona pasajera vuelve a estar en la parte más baja, ha girado un ángulo de 360 grados.
  - El cambio en la dirección en grados es de 360 grados.
  - La persona pasajera ha experimentado un ángulo perigónico de 360 grados.

Importante

En este tipo de problemas con ángulos, debemos prestar especial atención a los grados que nos aportan para poder resolverlos.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Ideas clave

- Los ángulos son una medida de giro en geometría. Se miden en grados, y un círculo completo equivale a 360 grados. Los ángulos nos permiten describir giros, direcciones y ubicaciones.
- Existen diferentes tipos de ángulos. Los ángulos rectos miden 90 grados y son como esquinas. Los ángulos agudos son menores de 90 grados, y los obtusos son mayores de 90 grados.
- En líneas paralelas, los ángulos alternos internos son iguales, y los ángulos correspondientes también son iguales. Estas propiedades son útiles para resolver problemas geométricos.
- Puedes sumar, restar, multiplicar o dividir ángulos para encontrar la medida de un ángulo compuesto. Por ejemplo, la suma de ángulos en un triángulo siempre es 180 grados.
- Los ángulos son esenciales en la arquitectura, diseño, navegación y muchas otras áreas. Comprender los ángulos es clave para construir, diseñar y navegar en nuestro entorno, así como para tener la capacidad de ponerlo a nuestro servicio.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Glosario

- **Intersección:** Una intersección se refiere al punto o lugar donde dos o más caminos, líneas, o elementos se cruzan o se cortan. En geometría, también se usa para describir el punto común en el que dos líneas se encuentran.

- **Radián:** El radián es una unidad de medida angular utilizada en matemáticas y física. Se define como el ángulo subtendido en el centro de un círculo cuando la longitud del arco que abarca es igual al radio de ese círculo. El radián es una forma natural de medir ángulos en muchas aplicaciones científicas y técnicas.

- **Sexagesimal:** El sistema sexagesimal es un sistema de numeración que se basa en la división de un círculo en 60 partes iguales. En este sistema, cada parte se llama un "sexagésimo" y se utiliza, comúnmente, para medir ángulos, como grados, minutos y segundos, donde hay 60 minutos en un grado y 60 segundos en un minuto.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

- **Teodolitos:** Un teodolito es un instrumento de medición utilizado en topografía y geodesia para medir ángulos horizontales y verticales con alta precisión. Se compone de un telescopio montado en una plataforma giratoria que se utiliza para realizar mediciones en terreno y determinar coordenadas geográficas, distancias y ángulos.

- **Vértice:** Un vértice es el punto de encuentro de dos o más líneas, segmentos o rayos en geometría. En polígonos, los vértices son los puntos donde se encuentran los lados. También se utiliza en el contexto de gráficos y redes para describir los nodos o puntos de conexión en un sistema o estructura.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Referencias bibliográficas

- Barrantes, H. (1978). *Introducción a la Matemática.* EUNED.
- Becerra, J. (2004). *Matemáticas V. El placer de dominarlas sin complicaciones.* Universidad Nacional Autónoma de México.
- Cámara, A., Garrido, R., Tolmos, P., Marcos, M. (2007). *Cálculo básico de Matemáticas y Estadística del Bachillerato al Grado.* Delta.
- Varberg, P. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* Editorial Pearson.

Enlaces web de interés

- [Ángulos: qué son y qué tipos existen.]
- [Ángulos y operaciones.]
- [Clasificación de ángulos.]
- [Ángulos: radianes y grados.]
- [Medidas de ángulos.]

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha