Competencia matemática
Competencias clave

Nivel 2

Financiado por
la Unión Europea
NextGenerationEU

MINISTERIO
DE TRABAJO
Y ECONOMÍA SOCIAL

Plan de Recuperación,
Transformación
y Resiliencia

Castilla-La Mancha

Índice de contenidos

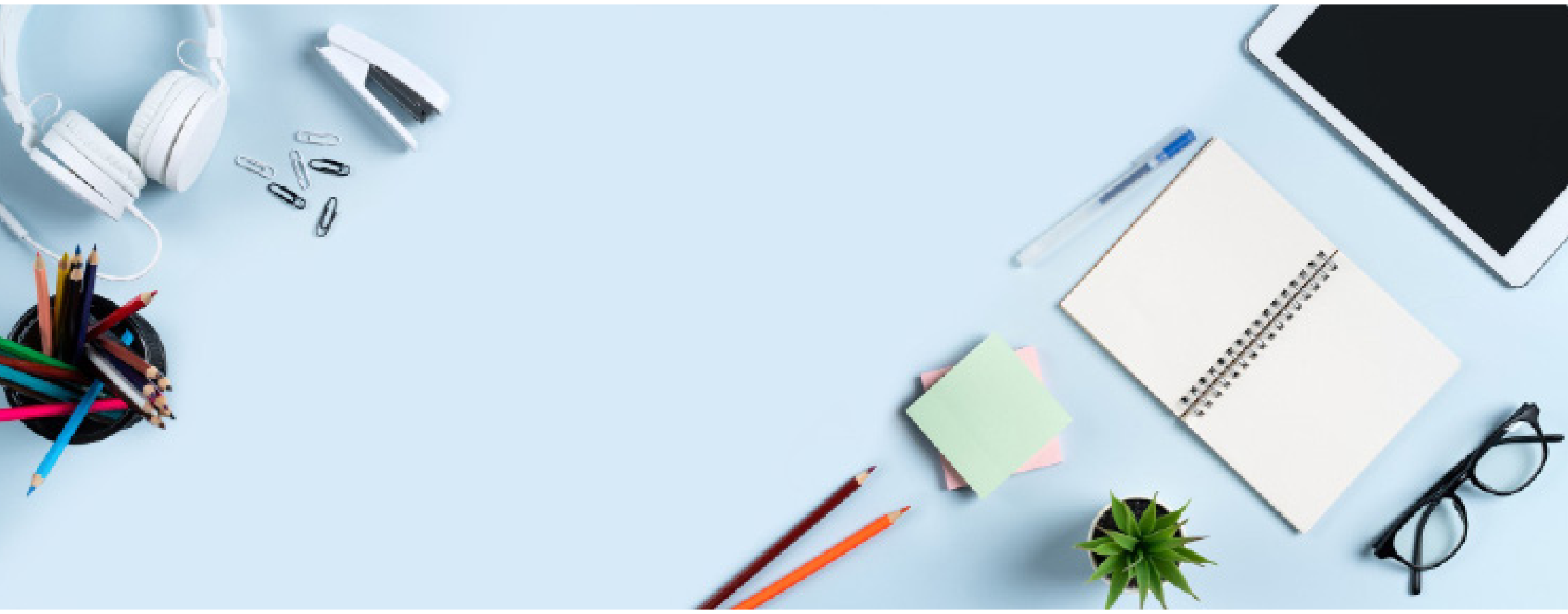
Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

BLOQUE III: APLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

UD6.1: GEOMETRÍA Y CUERPOS GEOMÉTRICOS.

Presentación



La geometría es un nuevo lenguaje que nos permite describir e interpretar el mundo en tres dimensiones. Esta rama matemática nos brinda una perspectiva más profunda de las estructuras que nos rodean y se aplica en la creación de objetos, edificios y avances tecnológicos.

A lo largo de esta unidad didáctica, analizaremos las formas y cuerpos geométricos, analizaremos sus propiedades y relaciones, y descubriremos cómo estas figuras tridimensionales influyen en nuestra realidad y creatividad.

Al finalizar el estudio de esta unidad, dominarás la habilidad de reconocer y describir cuerpos geométricos en tu entorno, comprendiendo cómo interactúan y cómo se pueden manipular. Conocerás los principios detrás de la construcción de sólidos tridimensionales y serás capaz de resolver problemas que involucren áreas, volúmenes y propiedades geométricas.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Objetivos

- Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos, relaciones y propiedades para describir la realidad (en su caso, con la asistencia de herramientas tecnológicas), aplicando los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea y resolver problemas a él referidos.
- Resolver situaciones problemáticas en diferentes contextos de la vida cotidiana escogiendo, entre las unidades e instrumentos de medida usuales, los que mejor se ajusten al tamaño y naturaleza de las figuras y espacios objeto de medición, realizando las estimaciones y mediciones pertinentes, con una precisión acorde a sus formas y tamaños.
- Resolver problemas sencillos que conlleven la obtención de medidas de segmentos y el cálculo de perímetros y ángulos de figuras planas o espaciales, con una precisión congruente con la situación planteada y expresando el resultado en la unidad de medida más adecuada.
- Estimar la medida de figuras y cuerpos geométricos con una exactitud coherente con la regularidad de sus formas y con su tamaño, calculando correctamente:
  - Áreas de superficies regulares (cuadrado, rectángulo, triángulo, rombo, trapecio y círculo) e irregulares limitadas por segmentos y arcos de circunferencia.
  - Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, desarrollando estrategias personales.

1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA DEL PLANO.

1.1. LÍNEAS, SEGMENTOS, ÁNGULOS.

Una **línea** es un conjunto infinito de puntos que se extiende hasta el infinito. No tiene ni principio ni fin. Estos puntos, aunque en la teoría son individuales, forman un elemento continuo en el que podemos movernos de un extremo a otro.

Los **segmentos** son tramos finitos de líneas que tienen puntos extremos claramente definidos. Mientras que las líneas se extienden infinitamente en ambas direcciones, los segmentos tienen límites. Imagina que divides una línea en dos partes mediante un corte. Cada una de estas partes es un segmento.

Los segmentos tienen una longitud concreta que nos permiten medir distancias en el espacio geométrico. Pueden ser cortos o largos, y su extensión está claramente definida. Al igual que las líneas, los segmentos pueden estar en posición horizontal, vertical o inclinados.

Importante

Las líneas no tienen grosor y están formadas por una sucesión infinita de puntos. No importa cuántos puntos elijas en una línea, siempre puedes encontrar otro punto entre ellos.

Un **ángulo** se forma cuando dos líneas o segmentos comparten un punto común denominado vértice. Los dos lados del ángulo se extienden desde el vértice. El espacio entre estos lados se conoce como abertura del ángulo, y es lo que medimos para comprender cuánto se ha girado uno de los lados con respecto al otro.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

En la siguiente imagen se muestra el dibujo de un ángulo:

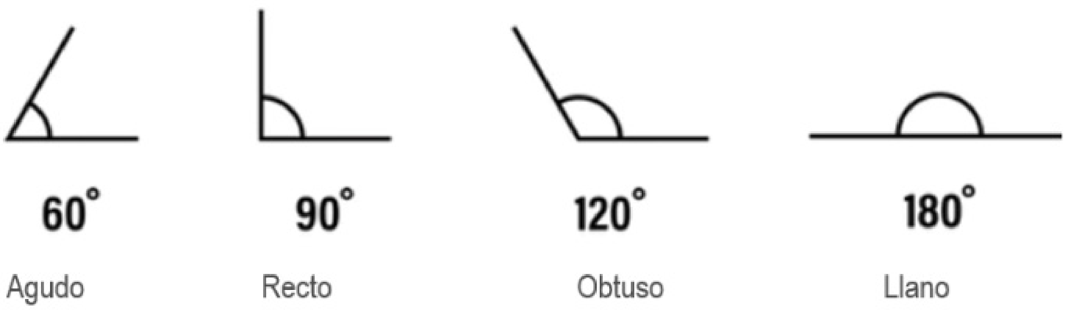
Ángulo.

Los **ángulos** se miden en grados, que son una unidad de medida angular. Un círculo completo tiene 360 grados. Esto significa que si imaginas dar una vuelta completa alrededor de un punto, habrás girado 360 grados. Un ángulo recto, como el que observamos en la imagen anterior, que tiene forma similar a una esquina, mide 90 grados.

Existen diferentes **tipos de ángulos:**

- **Ángulo recto:** Es un ángulo que mide exactamente 90 grados. Sus lados son perpendiculares entre sí y forman una L.
- **Ángulo agudo:** Los ángulos agudos son aquellos que miden menos de 90 grados.
- **Ángulo obtuso:** Los ángulos obtusos son aquellos que miden más de 90 grados.
- **Ángulo llano:** Es aquel que mide exactamente 180 grados.

En la siguiente imagen puedes ver un ejemplo de cada tipo de ángulo:



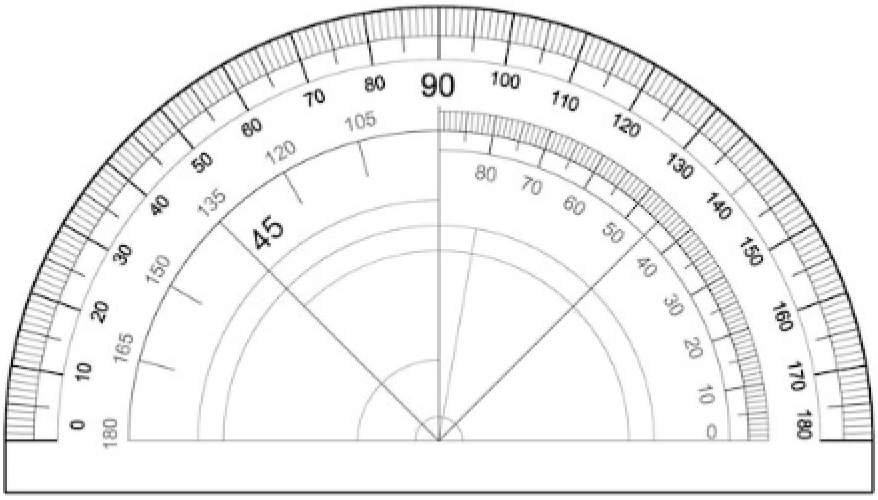
Tipos de ángulos.

1.2. MEDIDA Y OPERACIONES CON ÁNGULOS.

Los ángulos se miden en **grados**, es decir, se obtiene la medida de cuánto ha girado uno de los lados del ángulo respecto al otro. Se representa con el símbolo º.

Un círculo completo tiene 360º, lo que significa que uno de los lados da una vuelta completa respecto al otro con un punto fijo.

Para medir un ángulo en grados, podemos utilizar una herramienta llamada **transportador**. El transportador es un instrumento semicircular que se divide en 180 grados como podemos observar en la siguiente imagen.



Transportador de ángulos.

Para medir ángulos con el transportador, colocamos el vértice del ángulo en el centro del transportador y alineamos uno de los lados del ángulo con la línea base del transportador. Para conocer la medida del ángulo, nos fijamos en el punto exacto donde la línea del ángulo que no se encuentra en la base corta la semicircunferencia superior del transportador.

Importante

Los grados nos permiten medir y cuantificar el giro o inclinación entre dos líneas o segmentos.

Las **operaciones** más **fundamentales** con ángulos son la suma y la resta. Estas operaciones nos permiten combinar dos o más ángulos para obtener un nuevo ángulo que representa la combinación de sus giros individuales. Veamos cómo se realiza cada operación:

- **Suma de ángulos:** Supongamos que tenemos un ángulo A de 40 grados y otro ángulo B de 60 grados. Para sumar estos ángulos, colocamos los vértices de ambos ángulos en el mismo punto y alineamos sus lados iniciales. La suma de los ángulos A y B nos dará un nuevo ángulo C que representa el giro total. En este caso, 40 grados + 60 grados = 100 grados.

  Cuando la suma de los grados que miden dos ángulos da lugar a un ángulo recto de 90 grados, los dos ángulos se denominan complementarios. Por ejemplo, un ángulo de 50º y otro de 40º son dos ángulos **complementarios** porque la suma de sus grados es igual a 90º.

  Y si la suma de los grados de dos ángulos nos da como resultado un ángulo de 180 grados denominaremos esos ángulos como **suplementarios**.

- **Resta de ángulos:** Para restar un ángulo B del ángulo A, nuevamente colocamos los vértices de los ángulos en el mismo punto y alineamos los lados iniciales. Luego, medimos la diferencia entre las medidas de los dos ángulos. Supongamos que tenemos un ángulo A de 120 grados y un ángulo B de 80 grados. Al restar el ángulo B del ángulo A, obtenemos la diferencia de giros: 120 grados - 80 grados = 40 grados.

Además de las operaciones básicas de suma y resta, los ángulos complementarios y suplementarios también permiten realizar operaciones que involucran relaciones angulares específicas.

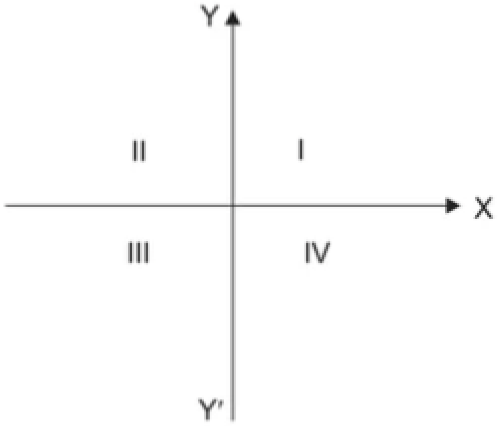
- **Operaciones con Ángulos Complementarios:** Si tenemos dos ángulos complementarios, es decir, que suman 90 grados en total, podemos utilizar esta relación para resolver problemas. Supongamos que un ángulo A es complementario de un ángulo B y que la medida del ángulo B es 40 grados. Para encontrar la medida del ángulo A, simplemente restamos la medida de B de 90 grados: 90 grados - 40 grados = 50 grados.

- **Operaciones con Ángulos Suplementarios:** Similarmente, los ángulos suplementarios, que suman 180 grados en total, también permiten realizar operaciones. Si un ángulo A es suplementario de un ángulo B y la medida del ángulo B es 120 grados, podemos encontrar la medida del ángulo A restando la medida de B de 180 grados: 180 grados - 120 grados = 60 grados.

2. COORDENADAS CARTESIANAS.

2.1. REPRESENTACIÓN EN EJES DE COORDENADAS: ABSCISAS Y ORDENADAS.

Cuando hablamos de **representación en ejes de coordenadas**, estamos hablando de la creación de un plano en dos dimensiones con dos rectas perpendiculares entre sí como elementos más importantes. Estas dos rectas se conocen como ejes, y se les denomina abscisas (X) y ordenadas (Y), tal y como muestra la siguiente imagen:



Ejes de coordenadas.

La **abscisa** es la coordenada horizontal en el plano. Imagina una línea recta que corta el plano en sentido horizontal, dividiéndolo en dos mitades. Cada punto en el plano tiene una abscisa que indica su posición en relación con esta línea.

La **ordenada** es la coordenada vertical en el plano. Similarmente, imagina una línea recta que corta el plano en sentido vertical, dividiéndolo en dos mitades. Cada punto en el plano también tiene una ordenada que señala su posición en relación con esta línea.

Cuando combinamos las abscisas y ordenadas, creamos un **sistema de coordenadas cartesianas** que nos permite ubicar puntos de manera precisa en el plano. El punto de intersección de la abscisa y la ordenada se llama **origen**, y actúa como el punto de referencia (0, 0) en el sistema.

Para ubicar un punto en el sistema de coordenadas, necesitamos dos valores: la abscisa (valor en el eje horizontal) y la ordenada (valor en el eje vertical). Supongamos que tenemos un punto A con abscisa 3 y ordenada 2. Esto significa que el punto A está tres unidades a la derecha del origen y dos unidades arriba del origen.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Recuerda

La representación en ejes de coordenadas es útil para comprender trayectorias y patrones en el espacio. Imagina que estás siguiendo la trayectoria de un objeto en movimiento. Cada punto en la trayectoria tiene una abscisa y una ordenada que te indican su posición exacta en cada momento.

3. POLÍGONOS.

3.1. PROPIEDADES Y RELACIONES.

Un **polígono** es una figura plana cerrada compuesta por segmentos de línea recta. Estos segmentos se llaman lados y los puntos donde se encuentran son los vértices del polígono. Desde el más sencillo hasta el más complejo, los polígonos tienen una amplia variedad de formas y tamaños, cada uno con su propio conjunto de propiedades y relaciones únicas.

Los polígonos se pueden clasificar según el número de lados que tienen. Los principales **tipos de polígonos** son:

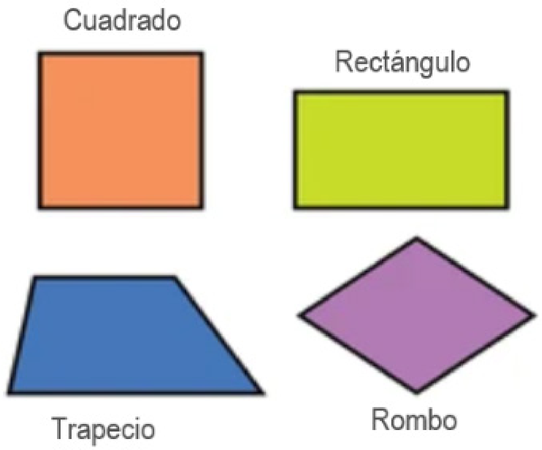
- **Triángulo:** Es un polígono con tres lados que, según la medida de sus lados, puede ser de los siguientes tipos:
  - **Equilátero:** Todos los lados del triángulo tienen la misma longitud.
  - **Isósceles:** Solo dos de los lados tienen la misma longitud.
  - **Rectángulo:** Dos de sus lados forman un ángulo recto.
  - **Escaleno:** Todos los lados tienen longitudes diferentes.

En la siguiente imagen podemos observar un triángulo de cada tipo:

Tipos de triángulos.

- **Cuadrilátero:** Es un polígono con cuatro lados que puede ser de los siguientes tipos:
  - **Cuadrado:** Todos los lados y ángulos del cuadrilátero son iguales.
  - **Rectángulo:** Todos los ángulos son de 90 grados.
  - **Rombo:** Todos los lados son iguales, pero no todos los ángulos son de 90 grados.
  - **Trapecio:** Tiene dos lados paralelos.

En la siguiente imagen se muestra un cuadrilátero de cada tipo:



Tipos de cuadriláteros.

- **Pentágono:** Es un polígono con cinco lados. Puede ser regular, si todos los lados y ángulos son iguales; o irregular, si los lados y ángulos son de diferentes longitudes.
- - **Hexágono:** Es un polígono con seis lados.
- - **Heptágono:** Es un polígono con siete lados.
- - **Octógono:** Es un polígono con ocho lados.

Observamos una muestra de cada tipo de figura geométrica en la siguiente imagen:

Otros tipos de figuras geométricas.

Los polígonos tienen **relaciones geométricas** que definen sus propiedades y comportamientos. Algunas de estas relaciones incluyen:

- **Suma de ángulos internos:** En un polígono, la suma de sus ángulos internos depende del número de lados. Por ejemplo, en un triángulo, la suma de los ángulos internos es siempre 180 grados. En un cuadrilátero, la suma de los ángulos internos es 360 grados.
- **Suma de ángulos externos:** La suma de los ángulos externos en cualquier polígono siempre es 360 grados. Esto significa que si sigues caminando alrededor de los vértices de un polígono, la suma de los ángulos en los que giras es constante.
- **Polígonos similares:** Dos polígonos son similares si sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales. Esto significa que si aumentas o disminuyes los lados de uno de los polígonos, los ángulos permanecerán iguales.
- **Polígonos congruentes:** Dos polígonos son congruentes si tienen lados y ángulos iguales. Esto implica que los polígonos tienen la misma forma y tamaño.

3.2. SIGNIFICADO Y CÁLCULO DE PERÍMETROS Y ÁREAS.

El **perímetro** de una figura geométrica se refiere a la longitud total de su contorno exterior. Es decir, el perímetro es el resultado de sumar las longitudes de todos los lados de la figura.

Imagina que estás rodeando una figura con una cuerda y luego estiras la cuerda para medir su longitud. La longitud de la cuerda es lo que mide el perímetro de la figura.

El **cálculo del perímetro** depende del tipo de figura geométrica, por ejemplo:

- **Perímetro de un rectángulo:** Un rectángulo tiene dos pares de lados iguales entre sí. Para calcular su perímetro, simplemente sumamos las longitudes de los cuatro lados:

  Perímetro = 2 × (lado más largo) + 2 × (lado más corto).

- **Perímetro de un círculo:** El perímetro de un círculo se llama circunferencia. Se calcula utilizando la fórmula circunferencia:

  2 × π × radio

  Donde π (pi) es una constante aproximadamente igual a 3,14159 y el radio es la distancia desde el centro del círculo hasta su borde.

El **área** de una figura geométrica se refiere a la extensión superficial que ocupa en el plano. Es la cantidad de espacio dentro de los límites de la figura.

Imagina que estás llenando una figura con baldosas pequeñas y, al terminar, cuentas cuántas baldosas has utilizado. Ese número es el área de la figura.

El cálculo del área también depende del tipo de figura geométrica. Aquí hay algunos ejemplos:

- **Área de un triángulo:** El área de un triángulo se puede calcular usando la fórmula:

  Área =(Base × Altura) 2

  La base es uno de los lados del triángulo y la altura es la distancia perpendicular desde la base al vértice opuesto.

- **Área de un cuadrado:** El área de un cuadrado se puede calcular utilizando la fórmula:

  Área = base × altura

  La base es el lado apoyado sobre la superficie y la altura es el lado vertical.

- **Área de un círculo:** El área de un círculo se calcula utilizando la fórmula:

  Área = π × Radio^2

  Donde π (pi) es la constante mencionada anteriormente y el radio es la distancia desde el centro del círculo hasta su borde.

Importante

El perímetro y el área no son equivalentes y miden diferentes aspectos de una figura. Dos figuras pueden tener el mismo perímetro, pero áreas diferentes, o viceversa. Esto se debido principalmente a la distribución de los lados y la extensión de la figura. Por ejemplo, un rectángulo largo y estrecho puede tener el mismo perímetro que un cuadrado, pero tendrá un área mucho mayor debido a su longitud adicional.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

4. LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO.

4.1. SIGNIFICADO DEL NÚMERO PI. RELACIÓN ENTRE EL DIÁMETRO Y LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA.

El **número π** es una constante matemática que representa la relación entre la longitud de la circunferencia de un círculo y su diámetro. Aunque suena simple, π es un número irracional, lo que significa que no se puede expresar como una fracción exacta ni como un número decimal finito. En lugar de ello, π tiene una expansión decimal infinita y no repetitiva, lo que lo convierte en un misterio matemático.

A lo largo de la historia, las investigaciones matemáticas han perseguido calcular π con mayor precisión. Desde la antigua Grecia hasta la era moderna, las aproximaciones de π han evolucionado. Arquímedes usó polígonos para calcular π, y en el siglo XVIII, el matemático indio Ramanujan encontró fórmulas asombrosas para π. Con la llegada de la computación, se ha podido calcular miles de millones de dígitos de π, pero todavía hay una infinidad de decimales por descubrir.

La relación fundamental entre el diámetro y la longitud de la circunferencia se establece mediante la fórmula matemática:

Longitud de la circunferencia = 2 x π × r

Esto significa que la longitud de la circunferencia es igual al valor de π multiplicado dos veces por su radio. Esta fórmula es el núcleo de la relación y nos permite calcular la longitud de la circunferencia cuando conocemos su diámetro, o viceversa.

Una de las características más asombrosas de la relación entre el diámetro y la longitud de la circunferencia es su universalidad. No importa el tamaño del círculo que consideremos, la relación entre la longitud de la circunferencia y el radio se mantiene constante debido a π. Desde un círculo diminuto trazado con un lápiz hasta la rueda de un automóvil, la constante π es siempre la misma.

4.2. CÁLCULO DE LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA.

Para calcular la **longitud de la circunferencia** es importante conocer dos conceptos importantes imprescindibles para calcular la longitud de la circunferencia:

- El diámetro: Es la distancia que va de un lado del círculo al otro, pasando por su centro.

- El radio: Es la mitad del diámetro, es decir, la distancia desde el centro del círculo hasta su borde.

La fórmula que nos permite calcular la longitud de la circunferencia se basa en al número pi y el diámetro del círculo. La fórmula es la siguiente:

Longitud de la Circunferencia = π × Diámetro

Otra forma de expresar esta fórmula es usando el radio del círculo:

Longitud de la Circunferencia = 2 x π × Radio

Estas dos fórmulas son equivalentes y te permiten encontrar la longitud de la circunferencia con solo saber el diámetro o el radio.

Veamos algunos ejemplos prácticos:

1. Utilizando el diámetro: Imagina que tienes un círculo con un diámetro de 10 centímetros. Usando la fórmula longitud de la circunferencia = π × Diámetro, podemos sustituir el valor del diámetro:

   Longitud de la Circunferencia = 3,14159 × 10 = 31,4159 cm.

2. Utilizando el radio: Supongamos que conocemos el radio de un círculo, que es 5 metros. Utilizando la fórmula longitud de la circunferencia = 2π × Radio, y sustituyendo el valor del radio:

   Longitud de la Circunferencia = 2 × 3,14159 × 5 = 31,4159 m.

3. Digamos que tenemos un círculo con un diámetro de 8 kilómetros, pero en lugar de usar muchos dígitos de π, usaremos una aproximación más simple, π ≈ 3,14:

   Longitud de la Circunferencia = 3,14 × 8 = 25,12 km.

4.3. CÁLCULO DEL ÁREA DEL CÍRCULO.

El **área de un círculo** representa el espacio o la superficie encerrada por su circunferencia exterior. Es una medida que nos indica cuánto espacio hay dentro del círculo.

Cuando calculamos el área de un círculo, estamos obteniendo la cantidad de unidades cuadradas que caben dentro de su contorno.

El radio de un círculo es la distancia desde su centro hasta cualquier punto en su borde. Imagina que tienes un círculo dibujado y colocas una regla desde el centro hasta el borde. Esa medida es el radio. El radio es fundamental para calcular el área del círculo, ya que determina qué anchura tiene el círculo desde su centro hasta su borde exterior.

El diámetro del círculo quedaría definido si ubicamos la regla de forma que corte todo el círculo pasando por el centro de este. La línea que une los puntos de corte con la circunferencia exterior y que pasa por el centro es su diámetro.

La fórmula básica que nos permite calcular el área de un círculo es, siendo r su radio:

Área del círculo = $\pi \times r$

Otra forma de expresar esta fórmula es usando el diámetro (d) en lugar del radio:

Área del círculo = $(\pi/4) \times d$

Estas dos fórmulas son esenciales para encontrar el área del círculo.

Los pasos para calcular el área del círculo son los siguientes:

- Medimos el radio o el diámetro: Lo primero que necesitas hacer es medir el radio o el diámetro del círculo. Puedes usar una regla o una cinta métrica para obtener esta medida.
- Aplicamos la fórmula del área: Una vez que tengas el valor del radio o el diámetro, aplica la fórmula adecuada. Si tienes el radio, usa la fórmula área del círculo = $\pi \times$ radio al cuadrado. Si tienes el diámetro, usa la fórmula área del círculo = $(\pi/4) \times$ diámetro al cuadrado.
- Sustituimos valores y calculamos: Sustituye el valor del radio o el diámetro en la fórmula y realiza los cálculos. Recuerda que π es aproximadamente 3,14159.
- Obtenemos el área: Después de hacer los cálculos, obtendrás el área del círculo en unidades cuadradas. Esta medida representa cuánto espacio hay dentro del contorno circular.

Por ejemplo, supongamos que tienes un círculo con un radio de 6 centímetros. Usando la fórmula área del círculo = $\pi \times$ radio al cuadrado, sustituyes el valor del radio:

Área del círculo = $3{,}14159 \times 6^2 = 3{,}14159 \times 36 = 113{,}09724$ centímetros cuadrados.

Ahora, imagina que conoces el diámetro del círculo, que es 14 metros. Usando la fórmula área del círculo = $(\pi/4) \times$ diámetro al cuadrado, sustituyes el valor del diámetro:

Área del círculo = $(3{,}14159/4) \times 14^2 = 0{,}7853975 \times 196 = 153{,}93804$ metros cuadrados.

Si tienes un círculo con un diámetro de 10 metros puedes usar la fórmula área del círculo = (π/4) × diámetro al cuadrado con la aproximación de π ≈ 3,14159:

Área del círculo = (3,14159/4) × 10^2 = 0,7853975 × 100 = 78,53975 metros cuadrados.

5. CUERPOS GEOMÉTRICOS: PRISMAS Y PIRÁMIDES.

5.1. CÁLCULO DEL ÁREA Y VOLUMEN DEL PRISMA.

Un **prisma** es una figura tridimensional que tiene dos **bases** idénticas, paralelas y polígonos, y **caras** laterales que son rectángulos o paralelogramos.

Imagina un libro rectangular: las portadas son las bases del prisma y las páginas que conectan las portadas son las caras laterales.

Para calcular el área de un prisma, necesitamos considerar tanto las bases como las caras laterales.

La fórmula básica que nos permite **calcular el área de un prisma** es bastante directa:

Área total del prisma = 2 × área de la base + área de las caras laterales

Esta fórmula toma en cuenta tanto las bases como las caras laterales del prisma para calcular el área total siguiendo los siguientes pasos:

1. Calculamos el área de la base: Comienza calculando el área de una de las bases del prisma. Si la base es un polígono regular, como un rectángulo o un triángulo, usa la fórmula estándar para calcular su área.

2. Multiplicamos el área de la base por 2: Dado que hay dos bases idénticas en un prisma, multiplica el área de una base por 2. Esto representa la contribución de ambas bases al área total.

3. Calculamos el perímetro de la base: Si las caras laterales son rectángulos, necesitas calcular el perímetro de la base (la distancia alrededor del polígono). Esto se utiliza para calcular el área de las caras laterales.

4. Calculamos el área de las caras laterales: La fórmula para el área de las caras laterales de un prisma depende de la forma de las bases. Para un prisma rectangular, la fórmula es: área de las caras laterales = perímetro de la base × altura. Si las caras laterales son paralelogramos, la fórmula es similar: área de las caras laterales = perímetro de la base × altura.

5. Sumamos área de la base y área de las caras laterales: Finalmente, suma el área de una base (multiplicada por 2) y el área de las caras laterales para obtener el área total del prisma.

Vamos a ver un ejemplo:

Supongamos que tienes un prisma rectangular con bases de 5 cm de largo y 3 cm de ancho. La altura del prisma es 8 cm. Comencemos calculando el área de la base:

Área de la base = largo × ancho = 5 × 3 = 15 cm^2.

Luego, multiplicamos el área de la base por 2:

2 × 15 = 30 cm^2.

Ahora, calculemos el área de las caras laterales:

Perímetro de la base = 2 × (largo + ancho) = 2 × (5 + 3) = 16 cm.

Área de las caras laterales = perímetro de la base × altura = 16 × 8 = 128 cm^2.

Finalmente, sumamos el área de la base y el área de las caras laterales:

Área total del prisma = 30 + 128 = 158 cm^2.

Ya conocemos cómo medir el área de un prisma. A continuación, veremos cómo medir su volumen. Para ello, la fórmula básica que nos permite calcular el **volumen de un prisma** es bastante directa:

Volumen del Prisma = Área de la Base × Altura

Esta fórmula involucra el área de una de las bases del prisma y la altura para calcular el volumen total.

Los pasos para calcular el volumen del prisma son:

1. Calculamos el área de la base: Comienza calculando el área de una de las bases del prisma. Si la base es un polígono regular, como un rectángulo o un triángulo, usa la fórmula estándar para calcular su área.

2. Medimos la altura: Mide la altura del prisma, que es la distancia entre las dos bases paralelas. Asegúrate de medir perpendicularmente a las bases para obtener una medida precisa.

3. Multiplicamos el área de la base por la altura: Multiplica el área de una base por la altura del prisma. Esto nos da el volumen contenido en el espacio tridimensional.

Por ejemplo, si tenemos un prisma rectangular con una base de 5 cm de largo y 3 cm de ancho, y una altura de 10 cm. Comencemos calculando el área de la base:

Área de la Base = Largo × Ancho = 5 × 3 = 15 cm^2.

Ahora, multiplica el área de la base por la altura:

Volumen del Prisma = Área de la Base × Altura = 15 × 10 = 150 cm^3.

5.2. CÁLCULO DEL ÁREA Y VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE.

Una **pirámide** es una figura tridimensional que tiene una **base poligonal y caras laterales** que se encuentran en un vértice común, llamado vértice de la pirámide.

Imagina la Gran Pirámide de Guiza en Egipto: la base cuadrada y las caras triangulares son características distintivas de una pirámide. Para calcular el área de una pirámide, necesitamos considerar tanto la base como las caras laterales.

La fórmula básica que nos permite calcular el área de una pirámide es bastante directa:

Área de la pirámide = área de la base + área de las caras laterales

Esta fórmula toma en cuenta tanto el área de la base de la pirámide como el área de sus caras laterales para calcular el área total.

Los pasos para calcular el área de una pirámide son:

1. Calculamos el área de la base: Comienza calculando el área de la base de la pirámide. Si la base es un polígono regular, como un triángulo o un cuadrado, usa la fórmula estándar para calcular su área.
2. Calculamos el perímetro de la base: Si la base de la pirámide es un polígono, calcula el perímetro de ese polígono. El perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono.
3. Calculamos la apotema: La apotema es la distancia desde el centro de la base de la pirámide hasta el punto medio de uno de los lados. Si tienes un triángulo como base, la apotema es la altura del triángulo. Si tienes otro polígono, deberás calcular la apotema correspondiente.
4. Calculamos el área de las caras laterales: Para calcular el área de las caras laterales de la pirámide, usa la fórmula: área de las caras laterales = (perímetro de la base × apotema) / 2. Esto te dará el área total de las caras laterales.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

5. Sumamos el área de la base y el área de las caras laterales: Finalmente, suma el área de la base de la pirámide y el área de sus caras laterales para obtener el área total de la pirámide.

Por ejemplo, supongamos que tienes una pirámide con una base cuadrada de 6 cm de lado y una altura de 8 cm. Comencemos calculando el área de la base:

Área de la base = lado × lado = 6 × 6 = 36 cm^2.

Ahora, calculemos el perímetro de la base:

Perímetro de la base = 4 × lado = 4 × 6 = 24 cm.

Calculemos la apotema: la apotema es igual a la mitad de la diagonal del cuadrado (en este caso, $6\sqrt{2}$ cm). Ahora, calculemos el área de las caras laterales:

Área de las caras laterales = (perímetro de la base × apotema) / 2 = $(24 \times 6\sqrt{2}) / 2 \approx 72\sqrt{2}$ cm^2.

Finalmente, sumamos el área de la base y el área de las caras laterales:

Área de la pirámide = $36 + 72\sqrt{2} \approx 144.85$ cm^2.

A continuación, veremos cómo medir el **volumen de la pirámide.** La fórmula básica que nos permite calcular el volumen de una pirámide es bastante sencilla:

Volumen de la pirámide = (área de la base × altura) / 3

Esta fórmula combina el área de la base de la pirámide y su altura para determinar el volumen total.

Los pasos para calcular el volumen de una pirámide son:

1. Calculamos el área de la base: Comienza calculando el área de la base de la pirámide. Si la base es un polígono regular, como un triángulo, un cuadrado o un pentágono, utiliza la fórmula estándar para calcular su área.

2. Medimos la altura: Mide la altura de la pirámide, que es la distancia entre la base y el vértice. Asegúrate de medir perpendicularmente desde la base hasta el vértice para obtener una medida precisa.

3. Multiplicamos el área de la base por la altura: Multiplica el área de la base de la pirámide por la altura y luego divide el resultado entre 3. Esto te dará el volumen contenido en el espacio tridimensional.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Supongamos que tienes una pirámide con una base cuadrada de 6 cm de lado y una altura de 8 cm. Comencemos calculando el área de la base:

Área de la base = lado × lado = 6 × 6 = 36 cm^2.

Ahora, multiplica el área de la base por la altura y luego divide entre 3:

Volumen de la pirámide = (área de la base × altura) / 3 = (36 × 8) / 3 = 288 / 3 = 96 cm^3.

5.3. COMPARACIÓN DEL VOLUMEN DEL PRISMA CON LA PIRÁMIDE DE IGUAL BASE Y ALTURA.

Un **prisma** es un sólido tridimensional con dos bases paralelas idénticas y caras laterales rectangulares o cuadradas que las conectan, mientas que una pirámide tiene una base poligonal y caras laterales triangulares que convergen en un vértice común. Ambas figuras comparten una característica fundamental: la misma base y altura.

Como hemos comentado, el volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de su base por su altura. La fórmula básica es:

Volumen del prisma = área de la base × altura

Y el volumen de una pirámide se calcula de manera similar, pero con un factor de división adicional. La fórmula es:

Volumen de la pirámide = (área de la base × altura) / 3

La diferencia clave entre las fórmulas radica en el factor de división adicional en la fórmula de la pirámide. Esto se debe a que una pirámide tiene menos espacio tridimensional en comparación con un prisma, debido a sus caras laterales triangulares que se estrechan hacia el vértice.

Vamos a analizar la comparación. Imaginemos un prisma y una pirámide con una base cuadrada de 4 cm de lado y una altura de 6 cm. Calcularemos sus volúmenes para ver cómo difieren.

Para el prisma:

Área de la Base = Lado × Lado = 4 × 4 = 16 cm^2

Volumen del Prisma = Área de la Base × Altura = 16 × 6 = 96 cm^3

Para la pirámide:

Área de la Base = Lado × Lado = 4 × 4 = 16 cm^2

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Volumen de la Pirámide = (Área de la Base × Altura) / 3 = (16 × 6) / 3 = 32 cm³

Comparando los volúmenes, notamos que el prisma tiene un volumen mayor que la pirámide con la misma base y altura. Esto se debe a que la pirámide tiene caras laterales que se inclinan hacia el vértice, lo que reduce su espacio tridimensional en comparación con el prisma, que tiene caras laterales rectangulares que se extienden hasta la altura completa.

6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS QUE IMPLIQUEN LA ESTIMACIÓN Y EL CÁLCULO DE LONGITUDES, SUPERFICIES Y VOLÚMENES.

Antes de abordar la resolución de problemas, recordemos los conceptos clave:

- **Longitud:** Representa el tamaño de una dimensión lineal y se mide en unidades como centímetros o metros.
- **Superficie:** Es el área de la parte exterior de una figura bidimensional y se mide en unidades cuadradas.
- **Volumen:** Representa el espacio ocupado por un objeto tridimensional y se mide en unidades cúbicas.

Los **pasos** para realizar los **cálculos** son los siguientes:

1. **Comprender el problema:** Lee el problema con atención y asegúrate de entender la información proporcionada y lo que se te pide calcular. Identifica las dimensiones relevantes, como longitudes, anchos, alturas o radios.
2. **Dibuja un diagrama:** Visualiza la situación dibujando un diagrama claro y preciso. Esto te ayudará a tener una representación visual de la figura geométrica y sus dimensiones.
3. **Estimación inicial:** Antes de realizar cálculos precisos, realiza una estimación aproximada. Esto te dará una idea de qué esperar y puede ayudarte a verificar si tus cálculos posteriores tienen sentido.
4. **Aplica fórmulas:** Utiliza las fórmulas adecuadas para calcular longitudes, superficies y volúmenes, dependiendo de la figura geométrica involucrada. Asegúrate de seleccionar las unidades correctas para tus cálculos.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

5. **Realiza los cálculos:** Sustituye los valores conocidos en las fórmulas y realiza los cálculos necesarios. Asegúrate de seguir el orden correcto de operaciones, como multiplicación y división antes que suma y resta.

6. **Verifica tus resultados:** Después de obtener los resultados numéricos, verifica si son razonables y coherentes con el problema. Asegúrate de que las unidades sean consistentes y de que tus cálculos sean lógicos.

7. **Presenta la respuesta:** Escribe tu respuesta en una forma clara y con las unidades apropiadas. Si es necesario, redondea tus respuestas a un número adecuado de decimales.

La **estimación** es una herramienta útil para verificar tus cálculos y comprender el orden de magnitud de una respuesta. A continuación, exponemos algunas estrategias para estimar en problemas geométricos:

- **Redondeo:** Redondea los valores a números más fáciles de calcular mentalmente. Por ejemplo, si tienes una longitud de 17,3 cm, podrías redondearla a 20 cm.

- **Uso de Potencias de 10:** Expresa los números en notación científica utilizando potencias de 10. Esto te permite trabajar con números más manejables. Por ejemplo, 4300 cm se puede escribir como 4.3 x 10^3 cm.

- **División y Multiplicación Rápida:** Divide o multiplica los valores por números cercanos a ellos para obtener una estimación rápida. Por ejemplo, si tienes que calcular 24% de 57, podrías redondear 57 a 60 y calcular el 25%, que es 15, y luego ajustar un poco.

Veamos algunos ejemplos. El primero relacionado con longitudes. Supongamos que estás midiendo la longitud de un cable para instalar en tu jardín. El cable mide aproximadamente 25 metros, pero quieres tener una estimación de cuántos centímetros es. Sabes que 1 metro es aproximadamente igual a 100 centímetros, así que puedes multiplicar la longitud en metros por 100 para obtener una estimación en centímetros. En este caso, 25 metros multiplicados por 100 es igual a 2500 centímetros.

El segundo relacionado con superficies. Imagina que estás pintando una pared rectangular en tu habitación. La pared mide 3 metros de largo y 2,5 metros de alto. Quieres saber cuánta pintura necesitas para cubrir la superficie de la pared. Utilizas la fórmula de área de un rectángulo (longitud × ancho) y calculas el área de la pared: 3 metros × 2,5 metros = 7,5 metros cuadrados. Ahora, sabes que necesitas alrededor de 8 litros de pintura para cubrir 10 metros cuadrados. Dado que tu pared tiene 7,5 metros cuadrados, estimas que necesitarás aproximadamente 6 litros de pintura.

El tercero relacionado con volúmenes. Supongamos que estás diseñando un acuario cilíndrico para tus peces. El radio del acuario es de 30 centímetros y la altura es de 50 centímetros. Quieres estimar cuántos litros de agua puede contener el acuario.

Utilizas la fórmula del volumen de un cilindro (π × radio^2 × altura) y calculas el volumen: π × (30 cm)^2 × 50 cm ≈ 45000 cm³. Sabes que 1 litro es igual a 1000 cm³, así que divides el volumen en cm³ entre 1000 para obtener una estimación en litros. En este caso, 45000 cm³ divididos entre 1000 es igual a 45 litros, lo que te indica que el acuario puede contener aproximadamente 45 litros de agua.

7. EMPLEO DE HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS PARA CONSTRUIR Y SIMULAR RELACIONES ENTRE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS.

Las **herramientas informáticas** han transformado la manera en que interactuamos con conceptos matemáticos y geométricos. A través de *software* y aplicaciones específicas, podemos crear, explorar y analizar figuras y relaciones geométricas de manera rápida y precisa.

A continuación, destacamos cómo se utilizan estas herramientas en la construcción y simulación de relaciones geométricas.

Una de las ventajas más notables de las herramientas informáticas es la capacidad de construir figuras geométricas con precisión. En lugar de depender de herramientas físicas como reglas y compases, podemos utilizar *software* para dibujar líneas, segmentos, ángulos y otras formas con gran exactitud. Esto es especialmente útil cuando se trata de construcciones geométricas complejas que requieren medidas precisas y relaciones específicas.

Las herramientas informáticas permiten simular relaciones y escenarios geométricos de manera interactiva. Podemos crear entornos virtuales en los que manipulamos figuras y observamos cómo cambian en tiempo real en respuesta a nuestras acciones. Esta capacidad es fundamental para explorar conceptos abstractos y experimentar con diferentes configuraciones.

Por ejemplo, podemos observar cómo se comportan las intersecciones entre planos en el espacio tridimensional o cómo cambian los ángulos y las longitudes cuando modificamos una figura.

La visualización es una parte crucial de la geometría. Las herramientas informáticas nos permiten representar figuras y relaciones de manera clara y comprensible. Podemos rotar y girar figuras para examinarlas desde diferentes ángulos, lo que nos ayuda a obtener una comprensión más profunda de sus características y propiedades. Esta capacidad de manipulación en tiempo real nos brinda una experiencia más inmersiva y dinámica que el uso de figuras estáticas en papel.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Las herramientas informáticas también son esenciales para la exploración de conceptos geométricos avanzados. Podemos investigar propiedades y teoremas geométricos complejos mediante simulaciones y representaciones visuales.

Por ejemplo, podemos visualizar la proyección de un objeto tridimensional en un plano bidimensional, explorar transformaciones geométricas como reflexiones y rotaciones, o comprender las propiedades de las curvas cónicas y las superficies de revolución.

El uso de herramientas informáticas en la geometría ha transformado la forma en que enseñamos y aprendemos. En el ámbito educativo, estas herramientas hacen que los conceptos geométricos sean más accesibles y atractivos. Los visualizadores geométricos interactivos permiten al alumnado explorar por sí mismo, experimentar con escenarios y descubrir relaciones por medio de la manipulación directa.

Además, las herramientas informáticas son invaluables en la resolución de problemas geométricos. Pueden ser utilizadas para comprobar soluciones, explorar diferentes enfoques y verificar la validez de teoremas y proposiciones. Por ejemplo, al abordar problemas de congruencia de triángulos o calcular áreas de figuras irregulares, las herramientas informáticas pueden ser utilizadas para verificar cálculos y construcciones.

Algunos ejemplos son:

1. **Geogebra:** Es una plataforma educativa que combina geometría, álgebra y cálculo en una sola herramienta. Permite crear construcciones geométricas interactivas, explorar propiedades matemáticas y experimentar con conceptos abstractos. Por ejemplo, el profesorado puede usar Geogebra para demostrar teoremas geométricos en el aula de manera visual y dinámica.

2. **AutoCAD:** Es un *software* de diseño asistido por computadora ampliamente utilizado en arquitectura e ingeniería. Permite crear planos precisos y modelos tridimensionales de edificios y estructuras. En el diseño arquitectónico, se utiliza para construir y visualizar relaciones geométricas en proyectos de construcción.

3. **SolidWorks:** Es otro *software* de diseño utilizado en ingeniería y diseño industrial. Permite crear modelos tridimensionales de piezas y ensamblajes, y simular cómo interactúan en el mundo real. Esto es valioso para diseñar objetos que requieren encaje preciso y cálculos de intersecciones geométricas.

4. **Blender:** Es una herramienta de modelado y animación en 3D utilizada en industrias como la animación, los videojuegos y el cine. Permite crear modelos geométricos complejos y simular cómo interactúan con la luz y el entorno. Por ejemplo, en la creación de películas de animación, Blender se utiliza para construir y dar vida a personajes y escenarios tridimensionales.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

5. **Tinkercad:** Es una herramienta en línea que permite crear modelos 3D y diseños para la impresión en 3D. Es popular entre estudiantes y entusiastas de la fabricación digital. Se utiliza para construir y modificar figuras tridimensionales, lo que involucra conceptos de relaciones geométricas en el espacio.

Ideas clave

- La **geometría** es el estudio de las formas y estructuras en el espacio. Comienza con puntos y líneas simples, pero su enfoque se extiende a formas más complejas, conocidas como polígonos y cuerpos geométricos tridimensionales. Estas formas básicas sirven como bloques de construcción esenciales para comprender las propiedades y relaciones geométricas más avanzadas.

- La **geometría** es la base matemática que da forma a nuestro mundo y está integrada en nuestra vida diaria. La arquitectura se basa en principios geométricos para diseñar edificios funcionales y estéticos. La física utiliza conceptos geométricos para modelar el comportamiento de partículas y fuerzas en el espacio-tiempo. En ingeniería, la geometría es esencial para diseñar desde circuitos electrónicos hasta vehículos.

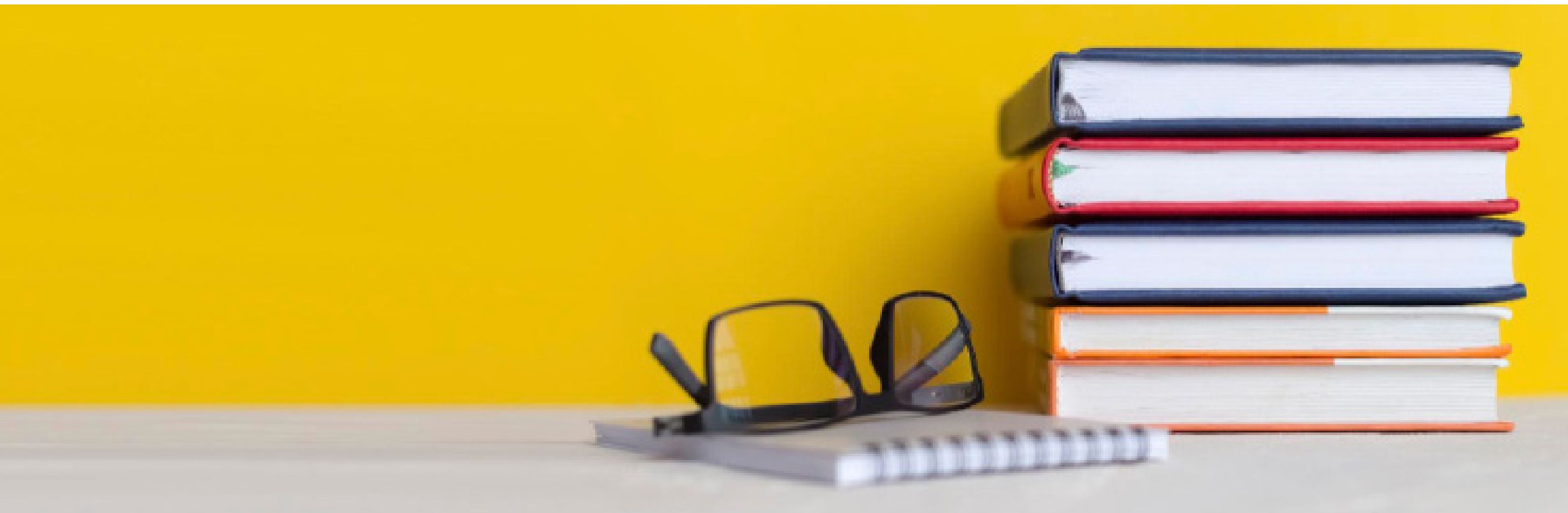
- La geometría explora **propiedades esenciales** de las formas, como longitud, área y volumen. A través de estas propiedades, las matemáticas descubren patrones y características universales que son independientes de la escala y orientación de las figuras. Esto permite establecer relaciones y teoremas que se aplican consistentemente en diversas situaciones geométricas.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Glosario

- **Apotema:** Se refiere a la menor distancia entre el centro del polígono regular y el punto medio de cualquiera de sus lados.
- **Paralelo:** Referido a dos o más líneas o superficies que guardan la misma distancia entre ellas en todos sus puntos.
- **Paralelogramo:** Cuadrilátero con lados opuestos paralelos en el que sus lados opuestos son iguales, sus ángulos opuestos son iguales y sus ángulos consecutivos son complementarios.
- **Perpendicular:** Forma un ángulo recto con otro elemento.
- **Pirámide de Guiza:** Una de las principales pirámides de Egipto, construida por el faraón Keops.

Referencias bibliográficas



- Giarrizzo, A. (2020). *Relaciones espaciales y cuerpos geométricos.* Ediciones Novedades Educativas (NOVEDUC).
- Glaeser, G. (2020). *Geometry and its applications in Arts, Nature and Technology.* Springer Nature.
- Guerrero, L. Bahena, R., Martín, R. (2020)*. Geometría y trigonometría.* Patria educación.
- Pereyra, L. (2021). *Geometría y trigonometría.* Klik Soluciones Educativas.
- Soto, E. (2019). *Áreas y volúmenes.* Ed. Aprende Matemáticas.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Enlaces web de interés

- Áreas y perímetros.
- Ejercicios resueltos: cálculo de áreas y perímetros.
- Áreas y volúmenes.
- Cuerpos geométricos: clasificación y elementos.
- Líneas y segmentos.
- Tipos de cuerpos geométricos.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

Castilla-La Mancha