Competencia matemática
Competencias clave

Nivel 3

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU

MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

Castilla-La Mancha

Índice de contenidos

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

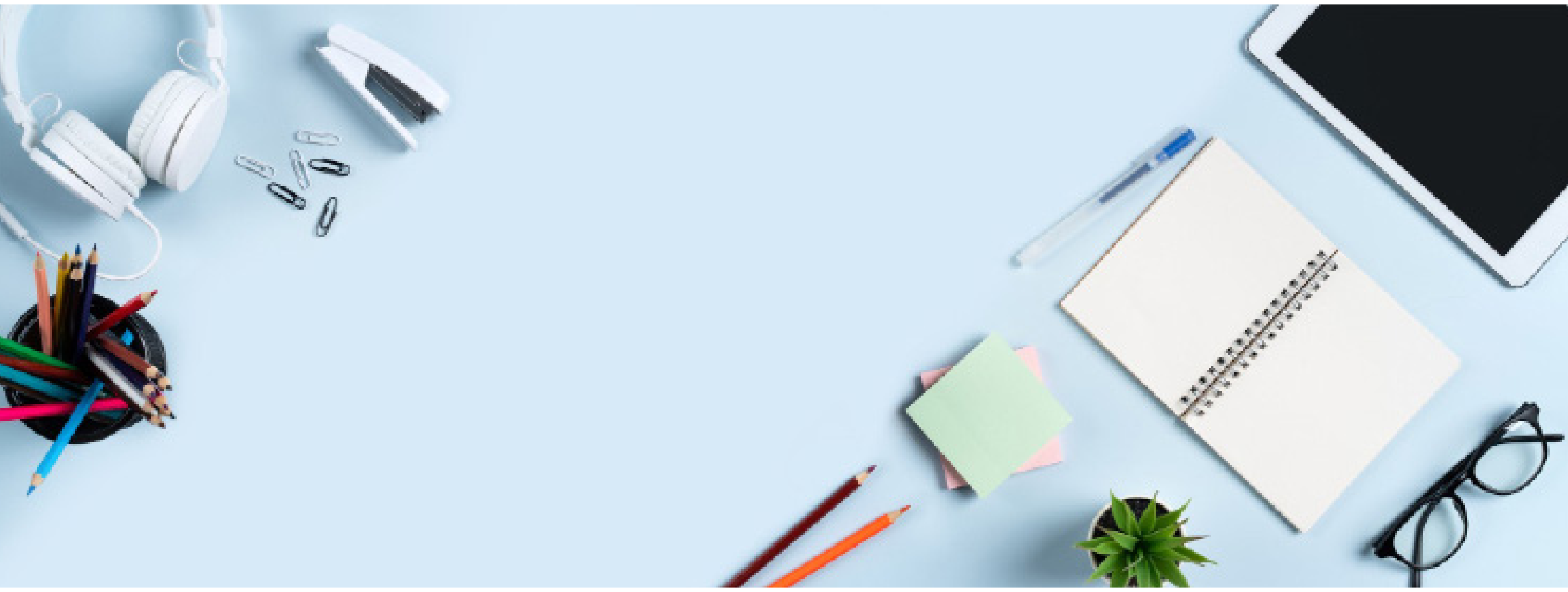
BLOQUE III: APLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

UD7.1: GEOMETRÍA.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Presentación



Los triángulos rectángulos son una parte fundamental de la geometría. En ellos, uno de los ángulos mide 90 grados, lo que los hace especialmente interesantes para el teorema de Pitágoras, una herramienta esencial para calcular las longitudes de sus lados.

Además, en el mundo de la geometría, otro tema importante es la longitud de la circunferencia, que se relaciona con el número pi.

Otro concepto crucial es el área del círculo es que nos permite calcular la cantidad de espacio que un círculo ocupa en un plano.

En esta unidad didáctica, analizaremos a fondo los triángulos rectángulos y conoceremos en detalle el teorema de Pitágoras, lo que nos permitirá resolver una amplia variedad de problemas geométricos. Repasaremos, también, la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia, que es útil en situaciones prácticas como la medición de ruedas de vehículos o la construcción de objetos redondos. Y, asimismo, profundizaremos en el concepto del área del círculo, lo que nos permitirá resolver problemas de geometría y calcular superficies en diversas aplicaciones, desde la arquitectura hasta la física.

Financiado por la Unión Europea
NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Objetivos

- Comprender el Teorema de Pitágoras, así como su relación con los triángulos rectángulos, y conocer su demostración y extrapolar su uso a diferentes ámbitos geométricos.
- Diferenciar los tipos de triángulos en función de sus elementos principales: lados y ángulos.
- Aplicar el uso del número pi en el cálculo de la longitud de la circunferencia y del área del círculo, y comprender su naturaleza y características.
- Utilizar la longitud de la circunferencia con soltura, extendiendo su uso a cualquier ámbito en que se pueda aplicar.
- Emplear el concepto de área de círculo para resolver problemas geométricos teóricos, así como de diferentes aplicaciones sencillas.

1. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

1.1. SIGNIFICADO Y CÁLCULO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.

La **historia de los triángulos** se remonta a las civilizaciones antiguas, como los egipcios y los babilonios, que tenían un conocimiento rudimentario de la **geometría y la trigonometría.** Los antiguos griegos desempeñaron un papel crucial en el desarrollo de la **teoría de los triángulos.** Euclides, un matemático griego del siglo III a.C., en su obra **"Los Elementos"**, estableció los principios fundamentales de la geometría, incluyendo las propiedades de los triángulos. Euclides presentó conceptos como **la igualdad de triángulos, la suma de los ángulos interiores de un triángulo** (teorema de la suma de los ángulos de un triángulo) y el **Teorema de Tales.**

Los matemáticos indios también hicieron contribuciones significativas a la teoría de los triángulos. Bhaskara II, un matemático indio del siglo XII desarrolló fórmulas para calcular las **áreas de triángulos** y describió reglas para **triángulos semejantes.**

Un triángulo es una figura geométrica básica que consta de **tres lados y tres vértices.** Estos son los **elementos fundamentales** de un triángulo:

- **Lados:** Los lados de un triángulo son las tres líneas que conectan los vértices. Cada lado tiene una longitud única, y se pueden identificar mediante letras, como "AB," "BC," y "CA."

- **Vértices:** Los vértices son los puntos donde se encuentran los lados. En un triángulo, siempre hay tres vértices, que se denotan con letras mayúsculas, como "A," "B," y "C."

- **Ángulos:** Cada vértice de un triángulo forma un ángulo, que es la región del plano limitada por dos lados. Los ángulos son medidas en grados y son fundamentales para comprender las propiedades y clasificaciones de los triángulos.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Se pueden realizar diferentes aplicaciones de triángulos. En **función de sus lados** podemos diferenciar entre:

Triángulo equilátero.

Triángulo isósceles.

Triángulo escaleno.

Clasificación de los triángulos en función de sus lados.

- **Triángulo equilátero:** Un triángulo equilátero es una figura geométrica en la que **todos sus lados tienen la misma longitud.** Esto significa que los tres lados del triángulo son iguales entre sí. A continuación, analizaremos las **características clave** de los triángulos equiláteros:

1. **Lados iguales:** La característica más distintiva de un triángulo equilátero es que todos sus lados son de igual longitud. Si denotamos la longitud de un lado como "a," entonces todos los lados miden "a."

2. **Ángulos:** Dado que todos los lados de un triángulo equilátero son iguales, sus ángulos también son iguales. Todos los ángulos interiores **miden 60 grados.** Esto se debe a que la **suma de los ángulos** interiores de cualquier triángulo es igual a **180 grados,** y en un triángulo equilátero, hay tres ángulos iguales, por lo que cada uno mide 60 grados.

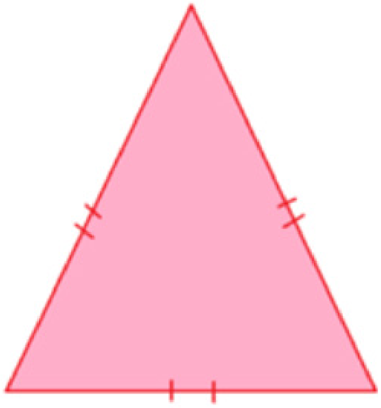
3. **Simetría:** Los triángulos equiláteros son figuras **altamente simétricas.** Tienen tres ejes de simetría, que son las líneas que dividen el triángulo en tres partes iguales. Cualquier línea que conecte un vértice con el punto medio del lado opuesto es un **eje de simetría.**

4. **Perímetro:** El perímetro de un triángulo equilátero se puede calcular fácilmente multiplicando la **longitud de un lado** (a) por 3, ya que hay tres lados iguales. Entonces, el perímetro es igual a 3a.

5. **Área:** El área de un triángulo equilátero se puede calcular utilizando la fórmula: **Área = (lado^2 * √3) / 4.** En este caso, el área se relaciona directamente con la longitud del lado (a).

6. **Aplicaciones:** Los triángulos equiláteros son comunes en la **construcción y la geometría,** especialmente en la creación de patrones y diseños simétricos. También son fundamentales en la teoría de números y la geometría algebraica.

En la siguiente imagen se muestra un triángulo equilátero:



Triángulo equilátero.

- **Triángulo isósceles:** Un triángulo isósceles es una figura geométrica en la que **dos de sus lados tienen la misma longitud**, mientras que **el tercer lado es de longitud diferente.** A continuación, exploraremos las características clave de los triángulos isósceles:

1. **Lados iguales:** En un triángulo isósceles, dos de sus tres lados tienen la misma longitud. Estos dos lados iguales se denominan **"lados congruentes"**, y el tercer lado se conoce como el **"lado desigual".**

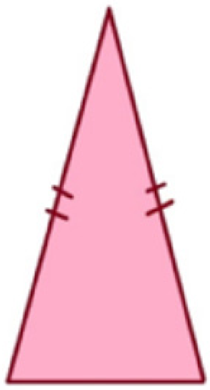
2. **Ángulos:** Debido a la igualdad de dos lados, los **ángulos opuestos** a esos lados congruentes también son **iguales**. Estos ángulos se denominan **"ángulos congruentes".** El tercer ángulo, opuesto al lado desigual, es diferente en tamaño y se conoce como el **"ángulo desigual".**

3. **Eje de simetría:** Los triángulos isósceles tienen un eje de simetría que divide el triángulo en **dos partes iguales.** Este eje de simetría se encuentra en la línea que conecta los vértices opuestos a los lados iguales.

4. **Perímetro:** El perímetro de un triángulo isósceles se calcula sumando la **longitud de sus tres lados.** Esto implica agregar la longitud de los dos lados iguales (a) y el lado desigual (b). Por lo tanto, el perímetro es igual a a + a + b = 2a + b.

5. **Área:** El área de un triángulo isósceles se puede calcular utilizando la fórmula: **Área = (base x altura) / 2.** En este caso, la **base** es el lado desigual (b), y la **altura** es la distancia perpendicular desde el vértice opuesto al lado desigual hasta la base. La altura puede calcularse utilizando el **Teorema de Pitágoras** y la mitad de la longitud de uno de los lados iguales.

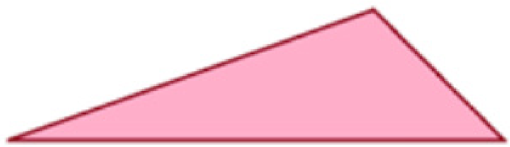
6. **Aplicaciones:** Los triángulos isósceles son comunes en la **arquitectura y la construcción,** especialmente en elementos como techos y vigas. También se encuentran en la teoría de la probabilidad y en la estadística.



Triángulo isósceles.

- **Triángulo escaleno:** Un triángulo escaleno es una figura geométrica en la que todos sus lados tienen **longitudes diferentes.** A continuación, exploraremos las características clave de los triángulos escalenos:

1. **Lados diferentes:** En un triángulo escaleno, todos los lados tienen longitudes diferentes. Ningún **par de lados es igual.**
2. **Ángulos:** Debido a las diferentes longitudes de los lados, los ángulos de un triángulo escaleno también **son diferentes en tamaño.** Los tres ángulos son distintos entre sí.
3. **Falta de simetría:** Los triángulos escalenos **carecen de ejes de simetría**, ya que no tienen lados iguales ni ángulos iguales. Esto los hace figuras altamente asimétricas.
4. **Perímetro:** El perímetro de un triángulo escaleno se calcula sumando la longitud de sus **tres lados diferentes.** En este caso, el perímetro es igual a la suma de las longitudes de los lados a, b y c.
5. **Área:** El área de un triángulo escaleno se puede calcular utilizando la **fórmula de Herón**, que es una expresión que involucra las longitudes de los tres lados y la fórmula trigonométrica **½ab x sin(C)**, donde "a" y "b" son las longitudes de dos lados y "C" es el ángulo entre esos lados. También se puede calcular usando la fórmula general de área de triángulo basada en la altura.
6. **Aplicaciones:** Los triángulos escalenos se encuentran en diversas aplicaciones de **geometría y trigonometría,** como el cálculo de distancias en cartografía y navegación.



Triángulo escaleno.

Para resumir, aquí hay una breve **comparación** de los tres tipos principales de triángulos según la clasificación por lados:

- **Triángulo Equilátero:** Todos los lados son de igual longitud, todos los ángulos son iguales (60 grados), y es altamente simétrico y regular.
- **Triángulo Isósceles:** Dos lados son de igual longitud, dos ángulos son iguales y uno es diferente, y tiene un eje de simetría.
- **Triángulo Escaleno:** Todos los lados son de diferente longitud, todos los ángulos son diferentes, y carece de simetría.

Recuerda

Una forma de clasificar a los triángulos es según sus lados. Así, de esta forma, podemos encontrar triángulos equiláteros, triángulos isósceles y triángulos escalenos.

Los triángulos se pueden clasificar también según sus ángulos como:

Triángulo agudo.

Triángulo obtuso.

Triángulo rectángulo.

Clasificación de los triángulos según sus ángulos.

- **Triángulo agudo:** Un triángulo agudo es un tipo de triángulo en el que todos **sus ángulos interiores son agudos,** lo que significa que miden **menos de 90 grados.** A continuación, exploraremos las **características** clave de los triángulos agudos:

1. **Ángulos agudos:** La característica distintiva de un triángulo agudo es la presencia de tres ángulos agudos. Todos los ángulos interiores miden menos de 90 grados.
2. **Lados:** Los lados de un triángulo agudo pueden tener longitudes variadas. No hay restricciones específicas en las longitudes de los lados.
3. **Perímetro y área:** El perímetro y el área de un triángulo agudo se calculan de manera similar a cualquier otro triángulo, **sumando las longitudes de los lados** y utilizando la **fórmula del área**, que implica la longitud de la base y la altura.
4. **Relación entre ángulos:** Debido a que todos los ángulos de un triángulo agudo son agudos, la suma de los ángulos interiores siempre es **menor que 180 grados.** Esta propiedad es importante en matemáticas y geometría.
5. **Aplicaciones:** Los triángulos agudos son comunes en una amplia variedad de aplicaciones, desde la **trigonometría hasta la geometría analítica,** y se utilizan en la resolución de problemas relacionados con distancias y ángulos.

- **Triángulo obtuso:** Un triángulo obtuso es un tipo de triángulo en el que **uno de sus ángulos interiores es mayor que 90 grados.** A continuación, exploraremos las **características clave** de los triángulos obtusos:

1. **Ángulo obtuso:** La característica más destacada de un triángulo obtuso es la presencia de, **al menos, un ángulo obtuso.** Un ángulo obtuso es aquel cuya medida es **mayor que 90 grados.** Puede haber más de un ángulo obtuso en un triángulo obtuso.
2. **Ángulos agudos:** Además del ángulo obtuso, **los otros dos ángulos** en un triángulo obtuso son agudos, lo que significa que miden **menos de 90 grados.**
3. **Lados:** Los lados de un triángulo obtuso pueden tener **longitudes variadas.** No hay restricciones específicas en las longitudes de los lados.
4. **Sin ángulo recto:** A diferencia de los triángulos rectángulos, los triángulos obtusos **no tienen un ángulo recto.** Esto significa que **no cumplen con el Teorema de Pitágoras,** tal como lo hacen los triángulos rectángulos.
5. **Perímetro y área:** El perímetro y el área de un triángulo obtuso se calculan de manera similar a cualquier otro triángulo, sumando las **longitudes de los lados** y utilizando la **fórmula del área,** que implica la longitud de la base y la altura.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

6. **Aplicaciones:** Los triángulos obtusos se encuentran en diversas aplicaciones **geométricas y trigonométricas.** A menudo, se utilizan en matemáticas para demostrar propiedades y relaciones geométricas.

- **Triángulo Rectángulo:** Un triángulo rectángulo es un tipo de triángulo en el que uno de sus ángulos interiores **mide exactamente 90 grados.** Este ángulo se conoce como un "**ángulo recto".** A continuación, analizaremos las características clave de los triángulos rectángulos:

1. **Ángulo recto:** La característica más distintiva de un triángulo rectángulo es la presencia de un ángulo recto. Este ángulo mide **exactamente 90 grados** y se forma cuando dos lados del triángulo son perpendiculares entre sí.

2. **Catetos:** Los lados que forman el ángulo recto se denominan **"catetos".** En un triángulo rectángulo, hay **dos catetos**, y cada uno es perpendicular al otro y está adyacente al ángulo recto.

3. **Hipotenusa:** La hipotenusa es el **lado opuesto al ángulo recto** en un triángulo rectángulo. Es el lado más largo del triángulo y se encuentra frente al ángulo recto. La longitud de la hipotenusa se denota comúnmente con la letra "c."

4. **Relación entre ángulos:** Además del ángulo recto, los otros dos ángulos de un triángulo rectángulo **son agudos**, lo que significa que miden **menos de 90 grados.** La suma de los ángulos agudos siempre es igual a 90 grados debido al ángulo recto.

5. **Perímetro:** El perímetro de un triángulo rectángulo se calcula **sumando las longitudes de los tres lados:** los dos catetos (a y b) y la hipotenusa (c). Por lo tanto, el perímetro es igual a a + b + c.

6. **Aplicaciones:** Los triángulos rectángulos son fundamentales en **trigonometría** y se utilizan en una variedad de aplicaciones prácticas, como la **resolución de problemas** de altura y distancia, la cartografía, la navegación y la construcción.

Además, los triángulos rectángulos cumplen el **Teorema de Pitágoras.** El Teorema de Pitágoras es una relación fundamental entre los lados de un triángulo rectángulo. Un triángulo rectángulo es un tipo de triángulo que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90 grados. El teorema **establece lo siguiente:**

En un triángulo rectángulo, el **cuadrado de la longitud de la hipotenusa** (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la **suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos** (los dos lados que forman el ángulo recto).

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Matemáticamente, esto se expresa como:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Donde:

- "c" representa la longitud de la hipotenusa.
- "a" y "b" representan las longitudes de los catetos.

Importante

El Teorema de Pitágoras es fundamental en geometría, y tiene una amplia variedad de aplicaciones en matemáticas y ciencia. Nos permite relacionar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y resolver problemas que involucran distancias, ángulos y áreas.

El Teorema de Pitágoras es una herramienta fundamental en matemáticas y geometría, y se utiliza para resolver problemas relacionados con **triángulos rectángulos.** Algunas de sus **aplicaciones más comunes** son las siguientes:

- **Calcular longitudes de lados:** Si conocemos la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo, podemos usar el teorema para encontrar la longitud del tercer lado. Esto es especialmente útil cuando trabajamos con medidas incompletas.
- **Determinar la existencia de triángulos rectángulos:** El teorema también se utiliza para verificar si un triángulo con longitudes de lados dadas es un triángulo rectángulo. Si se cumple el teorema, entonces el triángulo es rectángulo.
- **Calcular ángulos:** Además de calcular longitudes de lados, el teorema se puede utilizar para encontrar ángulos en un triángulo rectángulo. Esto es útil en aplicaciones como la trigonometría, donde se relacionan ángulos y longitudes de lados.

1.2. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La aplicación del Teorema de Pitágoras **en la resolución de problemas** en triángulos rectángulos es una parte esencial de la geometría y las matemáticas en general.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Este teorema ofrece una **herramienta poderosa** para calcular longitudes de lados, encontrar ángulos y resolver una amplia variedad de situaciones prácticas:

- **Cálculo de la distancia:** Uno de los usos más comunes del Teorema de Pitágoras es calcular la **distancia entre dos puntos en un plano.**

  Imagina que tienes un punto A y un punto B, y deseas encontrar la distancia directa entre ellos. Si conoces las coordenadas de ambos puntos, puedes utilizar el teorema para calcular la distancia. Por ejemplo:

  Supongamos que A tiene coordenadas (3, 4) y B tiene coordenadas (7, 8). La distancia entre A y B se calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

  Distancia = $\sqrt{(7 - 3)^2 + (8 - 4)^2}$

  Distancia = $\sqrt{4^2 + 4^2}$

  Distancia = $\sqrt{16 + 16}$

  Distancia = $\sqrt{32}$

  En este caso, el Teorema de Pitágoras se aplica para calcular la distancia en un plano cartesiano.

- **Construcción y carpintería:** En la construcción y la carpintería, el Teorema de Pitágoras se utiliza para garantizar que las estructuras sean **rectas y cuadradas.** Por ejemplo, al construir una escalera, es esencial que los escalones sean uniformes y que los ángulos sean exactamente de **90 grados.** Se pueden usar triángulos rectángulos para lograr esto. Si la longitud de la escalera es el cateto a, la altura del escalón es el cateto b y la hipotenusa es la distancia entre los escalones, puedes usar el teorema para **calcular la longitud de la hipotenusa** y, por lo tanto, asegurarte de que los escalones estén correctamente espaciados.

- **Topografía y cartografía:** Las personas que se dedican a la topografía y la cartografía utilizan el Teorema de Pitágoras para **medir distancias y calcular elevaciones** en la superficie de la Tierra. Al medir distancias en terrenos montañosos, por ejemplo, deben tener en cuenta las diferencias de elevación. Utilizan triángulos rectángulos formados por la distancia horizontal (cateto a), la diferencia de altura (cateto b) y la distancia directa (hipotenusa c) para realizar estos cálculos.

- **Resolución de problemas de altura:** En la trigonometría y la física, el Teorema de Pitágoras se aplica para **resolver problemas relacionados con la altura.** Imagina que quieres calcular la altura de un edificio o un objeto inaccesible. Puedes medir la distancia desde el punto de observación hasta el objeto, así como el ángulo de elevación. Utilizando esta información, puedes aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular la altura.

- **Navegación:** Los navegantes, ya sea en el mar o en el aire, utilizan el Teorema de Pitágoras para **determinar su ubicación y la distancia entre puntos de referencia.** Con la ayuda de dispositivos de medición y cálculos trigonométricos, pueden aplicar el teorema para estimar distancias y ángulos de forma precisa.

- **Triangulación y geodesia:** En geodesia, la ciencia que se encarga de medir y representar la Tierra, se utilizan triángulos rectángulos para calcular **distancias entre puntos geodésicos.** Esto es fundamental para la cartografía y la creación de mapas precisos.

- **Problemas de sombras y ángulos:** En situaciones donde se proyectan sombras, como en la hora del día o en la determinación de la altura de objetos inaccesibles, el Teorema de Pitágoras se utiliza para calcular longitudes y alturas. Esto es especialmente útil en problemas de trigonometría.

- **Estudio de coordenadas en el espacio:** Cuando trabajamos en un espacio tridimensional, como en geometría analítica, las coordenadas de puntos tridimensionales se pueden utilizar para **calcular distancias y ángulos.** La aplicación del Teorema de Pitágoras se extiende a problemas en el espacio tridimensional, donde se calculan distancias en tres dimensiones.

Para comprender mejor la aplicación del Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas, veamos algunos ejemplos de situaciones cotidianas y cómo se utiliza el teorema para resolverlos.

Ejemplo 1: Imagina que estás en un parque y deseas caminar desde el punto A al punto B. Quieres calcular la distancia directa entre los dos puntos. Conoces las coordenadas de A (3, 4) y B (7, 8).

- **Paso 1:** Identifica los catetos a y b.

  Cateto a: La diferencia entre las coordenadas x de A y B. $a = 7 - 3 = 4$ unidades.

  Cateto b: La diferencia entre las coordenadas y de A y B. $b = 8 - 4 = 4$ unidades.

- **Paso 2:** Aplica el Teorema de Pitágoras.

  $c^2 = a^2 + b^2$

  $c^2 = 4^2 + 4^2$

$c^2 = 16 + 16$

$c^2 = 32$

- **Paso 3:** Calcula la longitud de la hipotenusa (c).

$c = \sqrt{32} \approx 5{,}66$ unidades

La distancia directa entre los puntos A y B es, aproximadamente, 5,66 unidades.

Ejemplo 2: Supongamos que estás construyendo una escalera en tu casa y deseas que los escalones están a una altura uniforme y que los ángulos sean exactamente de 90 grados. Para lograrlo, debes aplicar el Teorema de Pitágoras.

- **Paso 1:** Identifica los catetos a y b.

Cateto a: La altura de cada escalón.

Cateto b: La longitud horizontal de cada escalón.

- **Paso 2:** Aplica el Teorema de Pitágoras.

$c^2 = a^2 + b^2$

Supongamos que deseas que la altura de cada escalón (cateto a) sea de 7 centímetros y la longitud horizontal de cada escalón (cateto b) sea de 10 centímetros.

- **Paso 3:** Calcula la longitud de la hipotenusa (c).

$c^2 = (7 \text{ centímetros})^2 + (10 \text{ centímetros})^2$

$c^2 = 49 + 100$

$c^2 = 149$

$c \approx \sqrt{149} \approx 12{,}21$ centímetros

La longitud de la hipotenusa de cada escalón es, aproximadamente, 12,21 pulgadas. Esto garantiza que los ángulos sean de 90 grados y que los escalones sean uniformes.

2. LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO.

2.1. CÁLCULO DE LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA APLICADO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

El estudio de la circunferencia y su longitud tiene raíces antiguas en **diversas culturas.** Los antiguos egipcios y babilonios ya habían desarrollado métodos para estimar el valor de **π (pi)**, que es esencial para calcular la **longitud de la circunferencia.** Sin embargo, uno de los primeros intentos documentados de calcular el valor de π se atribuye a los matemáticos griegos.

En la antigua Grecia, matemáticos como **Arquímedes** (287-212 a.C.) se esforzaron por calcular una aproximación precisa de π y, por lo tanto, la longitud de la circunferencia.

Arquímedes utilizó un enfoque geométrico ingenioso que involucraba inscribir y circunscribir **polígonos regulares alrededor de un círculo.** Cuantos más lados tenía el polígono, más se aproximaba a la longitud real de la circunferencia. A través de este método, Arquímedes demostró que π estaba entre 3 1/7 y 3 10/71.

El **cálculo preciso de π** y la **longitud de la circunferencia** se convirtió en un **desafío matemático** durante siglos. A lo largo de la historia, diversos matemáticos contribuyeron a refinar las aproximaciones de π y desarrollar métodos más sofisticados para calcular la longitud de la circunferencia. No fue hasta el **desarrollo del cálculo diferencial** en los siglos XVII y XVIII que se lograron aproximaciones más precisas.

La **longitud de la circunferencia** es la medida de la distancia alrededor del **borde de un círculo.** En otras palabras, es la distancia que habría que recorrer a lo largo de la circunferencia para dar una vuelta completa alrededor del círculo y regresar al punto de partida. Matemáticamente, la longitud de la circunferencia se denota comúnmente con la letra **"C".**

La longitud de la circunferencia **depende del radio** (la distancia desde el centro del círculo hasta su borde) y **está relacionada con el valor de π (pi)**, una constante que es aproximadamente igual a 3,14159. En resumen, la fórmula básica para calcular la longitud de la circunferencia es:

$$C = 2\pi r$$

Donde:

"C" representa la longitud de la circunferencia.

"π" es la constante matemática pi, que se usa comúnmente como aproximadamente 3,14159.

"r" es el radio del círculo, que es la distancia desde el centro del círculo hasta su borde.

La relación entre la longitud de la circunferencia y el valor de π (pi) es fundamental para entender cómo se calcula la **longitud de una circunferencia.** Pi es una constante irracional, lo que significa que su representación decimal es infinita y no periódica. La **aproximación** comúnmente utilizada para π es **3,14159**, aunque en cálculos precisos se emplean más decimales.

Cuando hablamos de la longitud de una circunferencia, la relación con π se expresa en la fórmula **C = 2πr.** Esto significa que la longitud de la circunferencia es igual a dos veces π multiplicado por el radio del círculo. En otras palabras, si conocemos el radio de un círculo, podemos calcular su circunferencia multiplicando el valor de π por dos y luego por el radio.

Importante

La longitud de la circunferencia es un concepto matemático fundamental que ha desafiado a las mentes de matemáticos y científicos a lo largo de la historia. Su relación con la constante π (pi), y su aplicabilidad en numerosos campos, la convierten en una herramienta poderosa para comprender y abordar una amplia variedad de problemas y aplicaciones prácticas.

Veamos, a continuación, algunos ejemplos de uso de la longitud de la circunferencia para la resolución de problemas, **aplicado en diferentes campos:**

- **Circunferencia:** Supongamos que tenemos un círculo con un radio de 5 centímetros. Para encontrar la longitud de la circunferencia, aplicamos la fórmula $C = 2\pi r$

  $$C = 2\pi(5\ \text{cm}) = 10\pi\ \text{cm} \approx 31{,}42\ \text{cm}.$$

  La longitud de la circunferencia es aproximadamente 31,42 centímetros. Esto significa que si caminamos alrededor del círculo, recorreríamos una distancia de aproximadamente 31,42 centímetros.

- **Rueda de una bicicleta:** Supongamos que estamos interesados en calcular la longitud de la circunferencia de la rueda de una bicicleta. Si medimos el radio de la rueda y encontramos que es de 35 centímetros, podemos aplicar la fórmula:

  $$C = 2\pi(35\ \text{cm}) \approx 219{,}91\ \text{cm}.$$

  La longitud de la circunferencia de la rueda de la bicicleta es, aproximadamente, 219,91 centímetros. Esto significa que, por cada revolución completa de la rueda, avanzaríamos unos 219,91 centímetros.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

- **Parques:** Imaginemos que estamos en un parque y encontramos un círculo grande, como una fuente ornamental. Si medimos el radio del círculo y determinamos que es de 12 metros, podemos calcular la longitud de la circunferencia de la fuente utilizando la fórmula:

  $$C = 2\pi(12\ m) = 24\pi\ m \approx 75{,}40\ m.$$

  La longitud de la circunferencia de la fuente es aproximadamente 75,40 metros. Si camináramos alrededor de la fuente, recorreríamos una distancia de aproximadamente 75.40 metros.

- **Neumáticos:** El diseño de neumáticos es un campo de la ingeniería donde el cálculo de la longitud de la circunferencia juega un papel crucial. Los ingenieros de neumáticos deben asegurarse de que un neumático tenga la **circunferencia adecuada para su aplicación**, lo que afecta directamente su **rendimiento y seguridad.** Un neumático bien diseñado debe proporcionar un equilibrio óptimo entre agarre, durabilidad y eficiencia de combustible.

  Supongamos que un fabricante de neumáticos está desarrollando un nuevo neumático para automóviles deportivos de alto rendimiento. Para garantizar un rendimiento óptimo en la carretera y la seguridad del conductor, los ingenieros deben calcular la longitud de la circunferencia del neumático. En este caso, el radio del neumático es crítico para determinar la longitud de la circunferencia.

  Si el radio del nuevo neumático es de 0,35 metros (35 centímetros), podemos calcular la longitud de la circunferencia utilizando la fórmula **$C = 2\pi r$**:

  $$C = 2\pi(0{,}35\ m) \approx 2{,}199\ m.$$

  La longitud de la circunferencia del neumático es de, aproximadamente, 2,199 metros. Esto significa que, por cada revolución completa del neumático, el automóvil avanza aproximadamente 2,199 metros. Esta medida es esencial para el diseño de neumáticos que se adapten a las necesidades de un automóvil deportivo de alto rendimiento.

- **Logística:** En la industria logística y de manufactura, las cintas transportadoras son ampliamente utilizadas para **mover productos y materiales** de un lugar a otro de manera eficiente. Calcular la longitud de la circunferencia de los rodillos en las cintas transportadoras es esencial para garantizar que los productos se muevan con la velocidad y precisión deseadas.

  Supongamos que una empresa logística está diseñando una cinta transportadora para transportar paquetes en un centro de distribución. Cada rodillo en la cinta transportadora tiene un radio de 0,2 metros. Calcular la longitud de la circunferencia de los rodillos es fundamental para determinar la velocidad de transporte de los paquetes.

$$C = 2\pi r = 2\pi(0{,}2\ m) \approx 1{,}257\ m$$

La longitud de la circunferencia de cada rodillo es de aproximadamente 1,257 metros. Esto significa que, cuando los rodillos giran, los paquetes avanzan 1,257 metros con cada revolución. Esta información es esencial para planificar la velocidad de la cinta transportadora y garantizar un flujo constante y eficiente de los productos.

- **Aviación:** En la aviación, el cálculo de la longitud de la circunferencia es esencial para la **navegación aérea y la planificación de rutas de vuelo.** Los pilotos y controladores aéreos deben conocer la longitud de la circunferencia de la Tierra para determinar las distancias entre puntos, velocidades y tiempos de vuelo. La circunferencia de la Tierra varía ligeramente debido a su forma no perfectamente esférica, por lo que se utilizan modelos geodésicos para cálculos precisos.

  Un ejemplo interesante es el cálculo de la longitud de la circunferencia de la Tierra en el ecuador. Utilizaremos un valor aproximado del radio terrestre de 6.371 kilómetros. La fórmula para calcular la longitud de la circunferencia en el ecuador es:

$$C = 2\pi r = 2\pi(6.371\ km) \approx 40.075\ km$$

  La longitud de la circunferencia de la Tierra en el ecuador es de aproximadamente 40.075 kilómetros. Esta cifra es esencial para planificar rutas de vuelo, calcular velocidades y estimar el tiempo de vuelo en vuelos de larga distancia.

- **Industria ferroviaria:** En la industria ferroviaria, el diseño de ruedas es crítico para **garantizar la seguridad y eficiencia del sistema ferroviario.** Calcular la longitud de la circunferencia de las ruedas es esencial para determinar la velocidad de los trenes, y para garantizar un desgaste uniforme de las ruedas y los rieles.

  Supongamos que una empresa de ferrocarriles está diseñando ruedas para un nuevo tren de alta velocidad. El radio de las ruedas es de 0,45 metros. Para calcular la longitud de la circunferencia de las ruedas, utilizamos la fórmula **C = 2πr**:

$$C = 2\pi(0{,}45\ m) \approx 2{,}827\ m$$

  La longitud de la circunferencia de las ruedas del tren es de aproximadamente 2,827 metros. Esto significa que, por cada revolución de las ruedas, el tren avanza 2,827 metros. Este cálculo es fundamental para determinar la velocidad máxima del tren y asegurar un funcionamiento seguro y eficiente.

- **Ciclismo:** En el ciclismo de competición, calcular la longitud de la circunferencia de la rueda de una bicicleta es esencial para medir el **tiempo y la velocidad en las carreras.**

Los ciclistas y entrenadores utilizan la longitud de la circunferencia de las ruedas para planificar estrategias de carrera y evaluar el rendimiento de los atletas.

Supongamos que un ciclista profesional está participando en una contrarreloj individual. Para calcular su velocidad en kilómetros por hora (km/h), necesita conocer la longitud de la circunferencia de las ruedas de su bicicleta. Supongamos que el radio de las ruedas es de 0,35 metros.

$$C = 2\pi r = 2\pi(0{,}35\ m) \approx 2{,}199\ m$$

La longitud de la circunferencia de las ruedas de la bicicleta es de aproximadamente 2,199 metros. Si el ciclista recorre esta distancia en un segundo, estará viajando a una velocidad de 2,199 metros por segundo. Para convertir esto a km/h, multiplicamos por 3 x 6:

$$2{,}199\ m/s \times 3{,}6\ km/h/m = 7{,}916\ km/h$$

La velocidad del ciclista es de aproximadamente 7,916 km/h. Este cálculo es fundamental para el monitoreo del rendimiento del ciclista y la planificación de estrategias de carrera.

- **Astronomía:** La longitud de la circunferencia se utiliza en astronomía para calcular las **distancias y dimensiones de objetos celestes**, así como para **describir eventos astronómicos.** Un ejemplo interesante es el cálculo de la circunferencia de la órbita terrestre alrededor del Sol.

  El radio promedio de la órbita terrestre se denomina "unidad astronómica" (UA) y es, aproximadamente, igual a 149,6 millones de kilómetros. Utilizando la fórmula **C = 2πr**, podemos calcular la longitud de la circunferencia de la órbita terrestre:

$$C = 2\pi(149{,}6 \text{ millones de km}) \approx 940{,}9 \text{ millones de km}$$

  La longitud de la circunferencia de la órbita terrestre es de aproximadamente 940,9 millones de kilómetros. Este valor es esencial para calcular las distancias a otros planetas y cuerpos celestes en el sistema solar y para comprender los patrones de movimiento de la Tierra en su órbita alrededor del Sol.

- **Arquitectura:** En la arquitectura contemporánea, la circunferencia y su longitud se utilizan en el diseño de **estructuras modernas y vanguardistas.** Un ejemplo destacado es el diseño del "The British Museum Great Court" en Londres, que presenta una espectacular cubierta de vidrio y acero.

  La estructura de vidrio y acero que cubre el Gran Patio del Museo Británico es un ejemplo de diseño arquitectónico vanguardista. Para calcular la cantidad de material necesario para la construcción de la estructura, los arquitectos y diseñadores tuvieron que considerar la longitud de las vigas y los soportes de acero que conforman la estructura.

Imaginemos que los diseñadores necesitan calcular la cantidad de acero necesaria para las vigas de soporte de la cubierta. Para ello, deben conocer la longitud de las vigas. Si la forma de la cubierta es circular y el radio de la circunferencia es de 50 metros, pueden calcular la longitud de las vigas utilizando la fórmula **C = 2πr**:

$$C = 2\pi(50\ m.) \approx 314{,}16\ m$$

La longitud de las vigas de soporte necesarias para la estructura de la cubierta es de, aproximadamente, 314,16 metros. Este cálculo es esencial para determinar la cantidad de material requerido y garantizar que la estructura sea segura y funcional.

Importante

Para calcular la longitud de la circunferencia, debemos tener muy presentes la fórmula de pi, ya que la vamos a emplear con mucha frecuencia para dichos cálculos.

2.2. CÁLCULO DEL ÁREA DEL CÍRCULO APLICADO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Comencemos por destacar la **importancia del círculo en la vida cotidiana.** Los círculos se encuentran en **todas partes,** desde las ruedas de un automóvil hasta las pizzas que disfrutamos en las noches de pizza. La forma circular es una de las formas más comunes en el mundo que nos rodea y, por lo tanto, entenderla es esencial.

Si observamos un plato, un reloj o, incluso, una simple moneda, notaremos que todos tienen una **forma circular.** Los círculos tienen un lugar central en nuestra vida diaria, y su comprensión es fundamental.

Un círculo es una figura geométrica en dos dimensiones que consta **de todos los puntos que están a una distancia constante de un punto central.** Este punto central se denomina "centro" del círculo, y la distancia constante desde el centro a cualquier punto en la circunferencia del círculo se llama **"radio".**

Uno de los conceptos clave relacionados con el círculo es su **área.** El área de un círculo se calcula utilizando una **fórmula específica.** Esta fórmula es fundamental para comprender la relación entre el radio y el área de un círculo. La fórmula del área de un círculo se expresa de la siguiente manera:

$$A=\pi r^2$$

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Donde:

A representa el área del círculo.

π es una constante que aproximadamente equivale a 3,14159.

r es la longitud del radio del círculo.

La fórmula del área del círculo es una de las más utilizadas en matemáticas y ciencias, y su comprensión es esencial para una variedad de aplicaciones prácticas y problemas geométricos.

A continuación, vamos a realizar una **demostración** simple pero poderosa de la fórmula del área del círculo. Esta demostración se basa en la idea de dividir el círculo en secciones más pequeñas y calcular su área:

1. Imagina un círculo con un radio r. Ahora, vamos a dividir este círculo en un número finito de sectores angulares, como si estuviéramos cortando una pizza en rebanadas. Cuanto más pequeños sean estos sectores, más se asemejarán a triángulos.

2. A medida que hacemos que los sectores angulares sean más pequeños, cada sector se asemejará, cada vez más, a un triángulo. La base de cada triángulo es, aproximadamente, una pequeña parte de la circunferencia del círculo, y la altura del triángulo es igual al radio r del círculo.

3. El área de un triángulo se calcula usando la fórmula del área de un triángulo, que es

   Área = 1/2 × base × altura

   En este caso, la base es la longitud de un pequeño arco de la circunferencia del círculo, y la altura es el radio r.

4. Ahora, sumamos las áreas de todos los triángulos pequeños que hemos creado al dividir el círculo. Cuanto más pequeños sean los triángulos, más precisamente se aproximará la suma de estas áreas al área del círculo.

5. A medida que hacemos que los triángulos sean infinitesimales, es decir, cuando el número de sectores angulares se acerca a infinito, la suma de las áreas de estos triángulos se convierte en el área del círculo.

6. Esto nos lleva a la conclusión de que el área del círculo es igual a πr^2, como se estableció en la fórmula original. Esta es una demostración intuitiva de la fórmula del área del círculo.

A continuación, se mostrarán ejemplos del cálculo del área del círculo en **diferentes situaciones:**

- **Decoración:** Imagina que estás decorando un pastel redondo para una ocasión especial. Quieres cubrir la parte superior del pastel con un glaseado delicioso. Para calcular cuánto glaseado necesitas, primero debes determinar el área de la superficie superior del pastel, que es un círculo.

  Supongamos que el radio del pastel es de 10 centímetros. Utilizamos la fórmula del área del círculo:

  $$A=\pi r^2$$

  Donde r es el radio. En este caso,

  r = 10 cm.

  $A=\pi\times(10cm)^2=\pi\times100cm^2\approx314{,}16cm^2$

  Entonces, el área de la superficie superior del pastel es de, aproximadamente, 314,16 centímetros cuadrados. Ahora sabes cuánto glaseado necesitas para cubrir esa área.

- **Piscina:** Imagina que estás planeando instalar una piscina circular en tu patio trasero. Para asegurarte de que haya suficiente espacio disponible, necesitas calcular el área requerida para la piscina. Supongamos que la piscina tiene un radio de 5 metros.

  Usamos la fórmula del área del círculo:

  $A=\pi r^2$

  Donde r es el radio. En este caso, r=5 metros.

  $A=\pi\times(5m)^2=\pi\times25m^2\approx 78{,}54m^2$

  El área requerida para la piscina circular es de, aproximadamente, 78,54 metros cuadrados. Ahora puedes planificar la ubicación de la piscina en tu patio trasero.

- **Parque:** Supongamos que eres un arquitecto paisajista encargado de diseñar un parque. Uno de los requisitos es crear un área de juego circular. Quieres que el área de juego tenga un radio de 8 metros. Para calcular cuánto espacio necesitas en el parque, utilizamos la fórmula del área del círculo.

  $A=\pi r^2$

  Donde r es el radio. En este caso, r=8 metros.

$A = \pi \times (8m)^2 = \pi \times 64m^2 \approx 201{,}06m^2$

Entonces, necesitas aproximadamente 201,06 metros cuadrados de espacio en el parque para crear el área de juego circular deseada.

- **Jardín:** Supongamos que eres un paisajista y estás diseñando un jardín circular en el patio de una residencia. El cliente quiere que el jardín tenga un radio de 6 cm. Para planificar la disposición de plantas y caminos, necesitas calcular el área del jardín circular.

  Utilizamos la fórmula del área del círculo:

  $A = \pi r^2$

  Donde r es el radio. En este caso, r=6 cm.

  $A = \pi \times (6cm)^2 = \pi \times 36\ cm^2 \approx 113{,}10\ cm^2$

  El área del jardín circular es de, aproximadamente, 113,10 centímetros cuadrados. Esto te ayuda a determinar la cantidad de tierra y plantas necesarias para completar el diseño del jardín.

- **Materiales:** Supongamos que eres un carpintero y necesitas comprar láminas de madera contrachapada para cortar círculos que serán utilizados en un proyecto de construcción. Cada lámina de contrachapado es un cuadrado de 4 cm de lado, y quieres cortar círculos con un radio de 2 cm.

  Primero, calculamos el área de cada círculo utilizando la fórmula del área del círculo:

  $A = \pi r^2$

  Donde r es el radio. En este caso, r=2 cm.

  $A = \pi \times (2cm)^2 = \pi \times 4\ cm^2 \approx 12{,}57cm^2$

  El área de cada círculo que deseas cortar es de, aproximadamente, 12,57 centímetros cuadrados. Ahora, puedes calcular cuántas láminas de contrachapado necesitas para tu proyecto y cuántos círculos puedes obtener de cada lámina.

- **Tanque de agua:** Imagina que trabajas en una planta de tratamiento de agua y necesitas determinar la capacidad de un tanque de almacenamiento de agua circular. El tanque tiene un radio de 12 metros. Para calcular su capacidad, usamos la fórmula del área del círculo.

  $A = \pi r^2$

  Donde r es el radio. En este caso, r=12 metros.

$A = \pi \times (12m)^2 = \pi \times 144m^2 \approx 452.39m^2$

El área de la superficie superior del tanque es de aproximadamente 452,39 metros cuadrados. Ahora, para determinar la capacidad del tanque, debemos considerar la profundidad del agua. Supongamos que la profundidad es de 8 metros.

Para calcular el volumen del tanque, usamos la fórmula del volumen de un cilindro:

$V = A \times h$

Donde A es el área de la base (el área del círculo) y h es la altura (profundidad del agua).

V = 452,39m² × 8m = 3619,12m^3

La capacidad del tanque de almacenamiento de agua circular es de, aproximadamente, 3619,12 metros cúbicos. Esto es esencial para garantizar que haya suficiente capacidad de almacenamiento de agua en la planta de tratamiento.

- **Teatro:** Supongamos que eres un diseñador de escenografía y estás trabajando en un teatro que quiere un escenario en forma de círculo para una producción especial. El teatro tiene un espacio disponible con un radio de 15 metros. Necesitas calcular el área del escenario circular para planificar la disposición de decorados y asientos.

Utilizamos la fórmula del área del círculo:

$A = \pi r^2$

Donde r es el radio. En este caso, r=15 metros.

$A = \pi \times (15m)^2 = \pi \times 225m^2 \approx 706,86m^2$

El área del escenario circular es de, aproximadamente, 706,86 metros cuadrados. Esto te ayuda a determinar la cantidad de espacio disponible para los actores y los elementos escénicos.

Ideas clave

- El teorema de Pitágoras es un principio fundamental en geometría que establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Es ampliamente utilizado en matemáticas y ciencias para calcular distancias y ángulos en diversas aplicaciones.
- La longitud de la circunferencia de un círculo se calcula usando la constante π y el radio. Esta fórmula es esencial para medir perímetros y circunferencias en geometría y física.
- El área de un círculo es un concepto geométrico ampliamente utilizado en una gran variedad de cálculos de múltiples ámbitos. Emplea elementos similares a la longitud de la circunferencia, como son el número pi y el radio.
- Un triángulo rectángulo es un tipo especial de triángulo que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90 grados. Este ángulo recto divide al triángulo en dos catetos (los lados que forman el ángulo recto) y una hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto).
- Todos estos conceptos conceptualmente sencillos, han ido adquiriendo una elevada importancia en el campo de las matemáticas. Han supuesto un apoyo para el desarrollo de las mismas, así como una base indispensable para comprender y aplicar otros muchos.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Glosario

- **Cartografía:** La cartografía es la disciplina que se encarga de crear mapas, cartas y representaciones gráficas de la Tierra o de regiones específicas de la Tierra.
- **Geometría analítica:** La geometría analítica es una rama de las matemáticas que combina conceptos de geometría y álgebra.
- **Hipotenusa:** En un triángulo rectángulo, que es un tipo de triángulo que tiene un ángulo recto (90 grados), la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.
- **Polígono regular:** Un polígono regular es una figura geométrica que tiene todos sus lados y ángulos congruentes (iguales).
- **Trigonometría:** La trigonometría es una rama de las matemáticas que se enfoca en las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos, en particular los triángulos rectángulos.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Referencias bibliográficas

- Flores, M. A., Flautsch, E. L. (1998). *Geometría Analítica Básica.* Editorial Progreso.
- Irwin, C., Fletcher, S., Jarvis, J. (2021). *Matemáticas prácticas.* Editorial Reverté.
- Miller, C., Heeren, V., Hornsby, J. (2005). *Matemáticas: razonamiento y aplicaciones.* Editorial Pearson.
- Ruiz, A., Barrantes, H. (2006). *Geometrías*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Strathern, P. (2014). *Pitágoras y su teorema.* Editorial Siglo XXI.

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Enlaces web de interés

- [Teoría y ejemplos del Teorema de Pitágoras.]
- [Aplicaciones del Teorema de Pitágoras.]
- [Teoría del Teorema de Pitágoras y demostración.]
- [Longitud de la circunferencia y área del círculo.]
- [Longitud de la circunferencia con ejemplos.]

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
MINISTERIO DE TRABAJO Y ECONOMÍA SOCIAL
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
Castilla-La Mancha

Financiado por
la Unión Europea
NextGenerationEU

MINISTERIO
DE TRABAJO
Y ECONOMÍA SOCIAL

Plan de Recuperación,
Transformación
y Resiliencia

Castilla-La Mancha